

## Численное решение сопряженной задачи гиперзвуковой аэродинамики и термомеханики термодеструктирующих конструкций

© Ю.И. Димитриенко<sup>1</sup>, А.А. Захаров<sup>1</sup>,  
М.Н. Коряков<sup>1</sup>, Е.К. Сыздыков<sup>2</sup>, В.В. Минин<sup>1</sup>

<sup>1</sup> МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, 105005, Россия.

<sup>2</sup> ОАО «ГосМКБ „Радуга“ им. А.Я. Березняка», Дубна, Московская обл.,  
141980, Россия

*Сформулирована постановка сопряженной задачи аэрогазодинамики, внутреннего теплопереноса и термомеханики теплозащитных конструкций гиперзвуковых летательных аппаратов. Предложен метод численного решения этой задачи, основанный на введении двух временных масштабов — «медленного» времени, соответствующего характерному времени распространения тепла в конструкции оболочки летательного аппарата, и «быстрого» времени, соответствующего характерному времени установления внешнего аэродинамического потока. Представлены примеры численного решения сопряженной задачи аэрогазодинамики и термомеханики элементов теплозащитных конструкций перспективного летательного аппарата. Показано, что вследствие высоких температур аэродинамического нагрева конструкций из полимерных композиционных материалов в них может происходить терморазрушение из-за термодеструкции полимерной фазы и образования интенсивного внутреннего газообразования в материалах конструкции.*

**Ключевые слова:** аэрогазодинамика, внутренний теплоперенос, термомеханика, гиперзвук, теплозащита, полимерные композиционные материалы, термодеструкция, численное моделирование.

**Введение.** Освоение гиперзвуковых скоростей является перспективной комплексной проблемой высокотехнологичного развития, в которой можно выделить такие составные части, как исследование гиперзвуковой аэродинамики полета и теплообмена на поверхности конструкций летательного аппарата, исследование теплофизики материалов конструкций и термомеханики конструкций, анализ и разработка материалов конструкций гиперзвуковых летательных аппаратов (ГЛА), а также проблемы гиперзвуковой аэроупругости, управления и др. Вопросам исследования гиперзвуковых аэродинамических режимов посвящено значительное количество работ, например [1–3]. Менее исследованы вопросы теплообмена при гиперзвуковых скоростях [4], аэроупругости [5, 6]. Вопросы теплофизики материалов и конструкций при высоких скоростях исследованы к настоящему времени достаточно хорошо для ставших традиционными высоко-

температурных материалов — жаропрочных сплавов, теплозащитных композитов, углерод-углеродных материалов [3, 7]. Вопросы термopочности металлических материалов при высоких температурах также исследованы достаточно полно [8]. Более сложную проблему представляет собой высокотемпературное термомеханическое поведение композиционных материалов на основе термостойких матриц и наполнителей, [9–11]. Комплексные сопряженные задачи аэротермодинамики, теплообмена, теплофизики и термopочности конструкций ГЛА практически не изучены, хотя имеются сравнительно недавние работы по исследованию аэротермоупругости конструкций при гиперзвуковых скоростях [5, 6]. Вместе с тем в реальных условиях эксплуатации ГЛА задачи аэротермодинамики, теплообмена и теплофизики конструкций являются связанными через граничные условия на поверхности конструкции, поэтому параметры теплового потока, воздействующего на материалы, зависят от свойств этих материалов. В свою очередь теплофизические свойства материалов при высоких температурах могут зависеть от напряженно-деформированного состояния конструкций: так, значительный уровень термонапряжений в композиционных материалах приводит к микрорастрескиванию их матрицы еще задолго до полного макроразрушения конструкции, вследствие чего меняются газопроницаемость и теплопроводность материалов, а следовательно, и температурное поле в конструкции. Таким образом, для исследования реальных процессов, происходящих в конструкциях ГЛА, возникает необходимость разработки методов решения сопряженной задачи аэротермодинамики, теплообмена, теплофизики и термомеханики конструкций. Один из подходов к решению этой задачи предложен в настоящей работе, он является развитием методов, разработанных в [9–15].

**Общая система уравнений сопряженной задачи гиперзвуковой аэротермодинамики и термомеханики.** Рассмотрим процесс обтекания высокоскоростным набегающим потоком характерного элемента конструкции ГЛА, имеющего конусообразную неосесимметричную форму с поперечным сечением в форме эллипса [5, 6]. Общая постановка сопряженной задачи аэротермодинамики и термомеханики состоит из трех систем уравнений:

уравнений Навье—Стокса внешнего газового потока, обтекающего конструкцию;

уравнений внутреннего тепломассопереноса в конструкции;

уравнений термоупругости оболочечной конструкции.

Химические реакции во внешнем газовом потоке учитывать не будем, так как они становятся существенными при скоростях потока

с числом  $M > 9 \dots 10$ . В данной работе рассматриваются скорости ГЛА, не превышающие этих значений.

**Система уравнений гиперзвуковой аэрогазодинамики.** Рассмотрим систему уравнений вязкого теплопроводного газа (уравнения Навье—Стокса), состоящую из уравнения неразрывности, уравнений движения и уравнения энергии. Записанная в бескоординатной форме, эта система в рассматриваемой области  $V$  движения потока газа, имеет следующий вид [11]:

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \rho \mathbf{v} = 0, \\ \frac{\partial \rho \mathbf{v}}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v} \otimes \mathbf{v} + p \mathbf{E} - \mathbf{T}_v) = 0, \\ \frac{\partial \rho E}{\partial t} + \nabla \cdot ((\rho E + p) \mathbf{v} - \mathbf{T}_v \cdot \mathbf{v} + \mathbf{q}) = 0. \end{cases} \quad (1)$$

К этим уравнениям присоединяются определяющие соотношения вязкого совершенного газа:

$$p = R\rho\theta, \quad e = c_v\theta, \quad E = e + |\mathbf{v}|^2/2, \quad (2)$$

$$\mathbf{T}_v = \mu_1(\nabla \cdot \mathbf{v})\mathbf{E} + \mu_2(\nabla \otimes \mathbf{v} + \nabla \otimes \mathbf{v}^T), \quad (3)$$

$$\mathbf{q} = -\lambda \nabla \theta. \quad (4)$$

Здесь  $\rho$  — плотность газа;  $t$  — время;  $E$  — полная энергия газа,  $E = c_v\theta + \frac{|\mathbf{v}|^2}{2}$ ;  $c_v$  — теплоемкость при постоянном объеме;  $\theta$  — температура газа;  $|\mathbf{v}|^2 = v^i v_i$  — квадрат модуля скорости;  $p$  — давление;  $R$  — газовая постоянная ( $R = \mathbb{R}/\mu$ ,  $\mu$  — молекулярная масса газа;  $\mathbb{R}$  — универсальная газовая постоянная);  $\mathbf{E}$  — метрический тензор;  $\mathbf{T}_v$  — тензор вязких напряжений в газе;  $\mathbf{q}$  — вектор потока тепла;  $\mu_1, \mu$  — коэффициенты вязкости газа;  $\lambda$  — коэффициент теплопроводности газа;  $\nabla$  — набла-оператор Гамильтона. Коэффициенты вязкости и теплопроводности газа являются функциями температуры, зависимости  $\mu_1(\theta)$ ,  $\mu(\theta)$  и  $\lambda(\theta)$  для воздуха выбирались согласно классической модели, которая описана, например в [16].

Рассмотрим четыре случая граничных условий для системы уравнений (1)–(4). На твердой непроницаемой поверхности обтекаемого тела  $\Sigma_1$  к системе (1) присоединяется граничное условие прилипания, условие теплового баланса и условие непрерывности температуры на поверхности тела:

$$\mathbf{v} = 0, \quad -\lambda \nabla \theta \cdot \mathbf{n} = q_s + \varepsilon_g \sigma \theta_e^4 - \varepsilon_s \sigma \theta_w^4, \quad \theta_w = \theta, \quad (5)$$

где  $q_e = -\mathbf{n} \cdot \lambda_s \cdot \nabla \theta$  — тепловой поток, который идет на нагрев конструкции;  $\theta_w$  — температура твердой стенки;  $\theta$  — температура газа на этой стенке;  $\theta_e$  — температура внешней поверхности пограничного слоя;  $\varepsilon_g$  и  $\varepsilon_s$  — интегральные коэффициенты излучения нагретого газа и твердой поверхности;  $\sigma$  — коэффициент Стефана—Больцмана. Унос материала конструкции не учитывался.

На границе входа потока  $\Sigma_2$  (сверхзвуковой и дозвуковой) задаются следующие условия:

$$\rho = \rho_e, \quad \mathbf{v} = \mathbf{v}_e, \quad \theta = \theta_e, \quad (6)$$

где  $\rho_e, \mathbf{v}_e, \theta_e$  — заданные значения параметров;  $\rho_e, \theta_e$  — параметры невозмущенного потока;  $\mathbf{v}_e$  — вектор скорости набегающего потока.

На дозвуковой границе выхода потока  $\Sigma_3$  задается одно условие, и еще четыре формулируются при численной аппроксимации решения [15]:

$$\rho = \rho_e, \quad \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial n} = 0, \quad \frac{\partial \theta}{\partial n} = 0, \quad (7)$$

где  $\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial n} = \mathbf{n} \cdot \nabla \otimes \mathbf{v}$  — нормальная производная вектора скорости. На сверхзвуковой границе выхода потока  $\Sigma_4$  граничные условия не задаются, но при численной реализации формулируются условия

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial n} = 0, \quad \frac{\partial \theta}{\partial n} = 0. \quad (8)$$

На плоскости симметрии  $\Sigma_5$  (которая может и отсутствовать) задаются следующие условия симметрии:

$$\frac{\partial \rho}{\partial n} = 0, \quad \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = 0, \quad \frac{\partial v_{\tau_i}}{\partial n} = 0, \quad I = 1, 2, \quad \frac{\partial \theta}{\partial n} = 0. \quad (9)$$

Начальные условия к системе (1)–(5) имеют вид

$$t = 0: \quad \rho = \rho^0, \quad \mathbf{v} = 0, \quad E = c_V \theta_0, \quad (10)$$

где  $\rho^0, \theta_0$  — заданные значения.

**Система уравнений внутреннего теплопереноса в конструкции ГЛА.** Будем рассматривать элемент конструкции ГЛА, обтекаемый внешним потоком, изготовленный из теплозащитного композиционного материала на полимерной матрице с термостойки-

ми волокнами. В матрице такого композита при нагреве до высоких температур, характерных для аэродинамического нагрева, происходят физико-химические процессы термодеструкции, сопровождающиеся образованием газообразных продуктов терморазложения, которые накапливаются в порах материала и отфильтровываются во внешний газовый поток, а также образованием новой твердой фазы — пиролитической фазы матрицы, которая обладает существенно более низкими упругопрочностными характеристиками, чем исходная полимерная фаза. В работе [9] была предложена четырехфазная модель для описания внутреннего теплопереноса и деформирования такого композита. Эта модель состоит из уравнения изменения массы полимерной фазы матрицы:

$$\rho_b \frac{\partial \varphi_b}{\partial t} = -J; \quad \mathbf{x} \in V; \quad (11)$$

уравнения фильтрации газообразных продуктов термодеструкции в порах композиционного материала:

$$\frac{\partial \rho_g \varphi_g}{\partial t} + \nabla \cdot \rho_g \varphi_g \mathbf{v}_g = J\Gamma; \quad \mathbf{x} \in V; \quad (12)$$

уравнения теплопереноса в термодеструктирующем композите:

$$\rho c \frac{\partial \theta}{\partial t} = -\nabla \cdot \mathbf{q} - c_g \nabla \theta \cdot \rho_g \varphi_g \mathbf{v}_g - J\Delta e^0; \quad \mathbf{x} \in V. \quad (13)$$

Здесь  $\varphi_f$ ,  $\varphi_b$ ,  $\varphi_p$  и  $\varphi_g$  — объемные концентрации трех твердых фаз (армирующие волокна, фаза исходной полимерной матрицы, пиролитическая фаза матрицы) и газовой фазы;  $\rho_f$ ,  $\rho_b$ ,  $\rho_p$  — плотности твердых фаз (полагаются постоянными);  $\rho_g$  — среднее значение плотности газовой фазы в порах (переменная величина);  $c_g$  — удельная теплоемкость газовой фазы при постоянном объеме;  $\rho$ ,  $c$  — плотность и удельная теплоемкость композита в целом;  $\mathbf{q}$  — вектор плотности теплового потока;  $\theta$  — температура композита, общая для всех фаз;  $\mathbf{v}_g$  — вектор скорости движения газовой фазы в порах;  $\Delta e^0$  — удельная теплота термодеструкции матрицы;  $J$  — массовая скорость термодеструкции матрицы;  $\Gamma$  — коэффициент газификации матрицы.

К уравнениям (11)–(13) присоединяются определяющие соотношения, связывающие вектор теплового потока  $\mathbf{q}$ , вектор скорости движения газов в порах  $\mathbf{v}_g$  с градиентом температуры  $\nabla \theta$  и градиентом давления  $\nabla p$  по законам Фурье и Дарси, а также соотношение Аррениуса для  $J$  — массовой скорости термодеструкции:

$$\mathbf{q} = -\lambda_s \cdot \nabla \theta, \quad (14)$$

$$\rho_g \varphi_g \mathbf{v}_g = -\mathbf{K} \cdot \nabla p, \quad (15)$$

$$J = J_0 \exp\left(-\frac{E_A}{R\theta}\right), \quad (16)$$

где  $p$  — поровое давление  $g$ -фазы, для которого выполняется уравнение Менделеева—Клапейрона:  $p = R\rho_g \theta$ ,  $J_0$  — предэкспоненциальный множитель;  $E_A$  — энергия активации процесса термодеструкции;  $R$  — газовая постоянная, а  $\lambda_s$  — тензор теплопроводности и  $\mathbf{K}$  — тензор газопроницаемости композита (зависят от концентраций фаз). К системе (11)–(13) присоединяются соотношения для плотности и удельной теплоемкости композита:

$$\rho = \rho_f \varphi_f + \rho_b \varphi_b + \rho_p \varphi_p + \rho_g \varphi_g, \quad c\rho = c_f \rho_f \varphi_f + c_b \rho_b \varphi_b + c_p \rho_p \varphi_p + c_g \rho_g \varphi_g, \quad (17)$$

где  $c_f$ ,  $c_b$ ,  $c_p$  — удельные теплоемкости твердых фаз при постоянной деформации — все полагаются постоянными, не зависящими от температуры. Введем также обозначения для плотности и удельной теплоемкости каркаса композита (совокупность всех твердых фаз):

$$\begin{aligned} \rho_s &= \rho_f \varphi_f + \rho_b \varphi_b + \rho_p \varphi_p, \\ c_s &= \frac{1}{\rho_s} (c_f \rho_f \varphi_f + c_b \rho_b \varphi_b + c_p \rho_p \varphi_p). \end{aligned} \quad (18)$$

Объемная концентрация  $\varphi_p$  пиролитической фазы матрицы может быть выражена аналитически через  $\varphi_b$ .

На нагреваемой части поверхности  $\Sigma_q$  конструкции граничные условия для уравнений (11)–(13) выглядят следующим образом:

$$x \in \Sigma_q : p = p_e, \quad \theta = \theta_w, \quad (19)$$

где  $p_e$  — местное давление внешнего газового потока на поверхности  $\Sigma_q$ . На остальной части  $\Sigma_v$  поверхности  $\Sigma$  композита задаем граничные условия герметичности и теплоизоляции:

$$x \in \Sigma_v : \mathbf{n} \cdot \nabla p = 0; \quad -\mathbf{n} \cdot \mathbf{k} \cdot \nabla \theta = 0. \quad (20)$$

Имеют место следующие соотношения между различными частями поверхности тела:  $\Sigma = \Sigma_v \cup \Sigma_q = \Sigma_\sigma \cup \Sigma_u$ ,  $\Sigma_\sigma = \Sigma_{v\sigma} \cup \Sigma_q$ ,  $\Sigma_v = \Sigma_{v\sigma} \cup \Sigma_u$ .

Для системы уравнений (11)–(13) начальные условия записывают в виде

$$t = 0 : \varphi_f = \varphi_f^0, \quad \varphi_b = \varphi_b^0, \quad \rho_g = \rho_g^0, \quad \theta = \theta_0. \quad (21)$$

**Система уравнений термоупругости оболочечной конструкции ГЛА.** Следуя [9] запишем в криволинейной системе координат  $Oq_1q_2q_3$ , связанной со срединной поверхностью оболочечной конструкции ГЛА, систему уравнений термоупругой оболочки, которая состоит из:

уравнений равновесия оболочки:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial q_\alpha}(A_\beta T_{\alpha\alpha}) + \frac{\partial}{\partial q_\beta}(A_\alpha T_{\alpha\beta}) - \frac{\partial A_\beta}{\partial q_\alpha} T_{\beta\beta} + \frac{\partial A_\alpha}{\partial q_\beta} T_{\alpha\beta} + A_\alpha A_\beta k_\alpha Q_\alpha - A_\beta \frac{\partial P_g}{\partial q_\alpha} &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial q_\alpha}(A_\beta M_\alpha) + \frac{\partial}{\partial q_\beta}(A_\alpha M_{\alpha\beta}) - \frac{\partial A_\beta}{\partial q_\alpha} M_{\beta\beta} + \frac{\partial A_\alpha}{\partial q_\beta} M_{\alpha\beta} - A_\alpha A_\beta Q_\alpha - A_\beta \frac{\partial P_g}{\partial q_\alpha} &= 0, \\ -A_1 A_2 (k_1 T_{11} + k_2 T_{22}) + \frac{\partial A_2 Q_1}{\partial q_1} + \frac{\partial A_1 Q_2}{\partial q_2} - p_e A_1 A_2 - (k_1 + k_2) A_1 A_2 \bar{\Phi}_g P_g &= 0, \\ \alpha, \beta = 1, 2, \quad \alpha \neq \beta; \end{aligned} \quad (22)$$

кинематических соотношений:

$$\begin{aligned} e_{\alpha\alpha} &= \frac{1}{A_\alpha} \frac{\partial U_\alpha}{\partial q_\alpha} + \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_\alpha}{\partial q_\beta} U_\beta + k_\alpha W, \\ 2e_{\alpha 3} &= \frac{1}{A_\alpha} \frac{\partial W}{\partial q_\alpha} + \gamma_\alpha - k_\alpha U_\alpha, \\ 2e_{12} &= \frac{1}{A_2} \frac{\partial U_1}{\partial q_2} + \frac{1}{A_1} \frac{\partial U_2}{\partial q_1} - \frac{1}{A_1 A_2} \left( \frac{\partial A_1}{\partial q_2} U_1 + \frac{\partial A_2}{\partial q_1} U_2 \right), \\ \kappa_{\alpha\alpha} &= \frac{1}{A_\alpha} \frac{\partial \gamma_\alpha}{\partial q_\alpha} + \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_\alpha}{\partial q_\beta} \gamma_\beta, \quad 2\kappa_{\alpha 3} = -\kappa_\alpha \gamma_\alpha, \\ 2\kappa_{12} &= \frac{1}{A_2} \frac{\partial \gamma_1}{\partial q_2} + \frac{1}{A_1} \frac{\partial \gamma_2}{\partial q_1} - \frac{1}{A_1 A_2} \left( \frac{\partial A_1}{\partial q_2} \gamma_1 + \frac{\partial A_2}{\partial q_1} \gamma_2 \right); \end{aligned} \quad (23)$$

определяющих соотношений термоупругости оболочки:

$$\begin{aligned} T_{\alpha\alpha} &= \sum_{\beta=1}^2 (C_{\alpha\beta} e_{\beta\beta} + N_{\alpha\beta} \kappa_{\beta\beta}) - P_{g\alpha} - \dot{T}_\alpha, \\ M_{\alpha\alpha} &= \sum_{\beta=1}^2 (N_{\alpha\beta} e_{\beta\beta} + D_{\alpha\beta} \kappa_{\beta\beta}) - M_{g\alpha} - \dot{M}_\alpha, \\ T_{12} &= 2(C_{66} e_{12} + N_{66} \kappa_{12}), \quad M_{12} = 2(N_{66} e_{12} + D_{66} \kappa_{12}), \\ Q_\alpha &= \bar{C}_{\alpha+3, \alpha+3} e_{\alpha 3}, \quad \alpha = 1, 2. \end{aligned} \quad (24)$$

Здесь  $T_{\alpha\alpha}, T_{\alpha\beta}, M_{\alpha\alpha}, M_{\alpha\beta}$  — усилия и моменты в оболочке;  $Q_\alpha$  — перерезывающие усилия;  $e_{\alpha\alpha}, e_{\alpha\beta}, e_{12}$  — деформации срединной поверхности оболочки;  $\kappa_{\alpha\alpha}, \kappa_{\alpha\beta}, \kappa_{12}$  — искривления срединной поверхности;  $U_\alpha, \gamma_\alpha, W$  — перемещения, углы искривления и прогиб срединной поверхности;  $A_\alpha, k_\alpha$  — параметры первой квадратичной формы и главные кривизны срединной поверхности оболочки [17]. Также обозначены  $P_g, M_g$  — усилие и момент порового давления в оболочке:

$$P_g = \int_{-h/2}^{h/2} \Phi_g p dq_3; \quad M_g = \int_{-h/2}^{h/2} \Phi_g p q_3 dq_3. \quad (25)$$

Введены также обозначения для усилий и моментов тепловых напряжений  $\overset{\circ}{T}_\alpha, \overset{\circ}{M}_\alpha$ , зависящих от температурных деформаций  $\overset{\circ}{\epsilon}_\alpha$  оболочки:

$$\overset{\circ}{T}_\alpha = \sum_{\beta=1}^3 C_{\alpha\beta} \overset{\circ}{\epsilon}_\beta^{(0)}, \quad \overset{\circ}{M}_\alpha = \sum_{\beta=1}^3 C_{\alpha\beta} \overset{\circ}{\epsilon}_\beta^{(1)}, \quad (26)$$

$$\overset{\circ}{\epsilon}_\beta^{(j)} = \int_{-h/2}^{h/2} a_{\theta 1} \overset{\circ}{\epsilon}_\beta q_3^j dq_3, \quad \overset{\circ}{\epsilon}_3^{(j)} = \int_{-h/2}^{h/2} a_{\theta 2} \overset{\circ}{\epsilon}_3 q_3^j dq_3, \quad j=0,1, \beta=1,2, \quad (27)$$

$$\overset{\circ}{\epsilon}_\gamma = (\alpha_f \Phi_f B_\gamma + \alpha_b \Phi_b \Omega_\gamma)(\theta - \theta_0) + \alpha_p \Omega_\gamma \int_0^t (\theta(t) - \theta(\tau)) \overset{\circ}{\Phi}_p d\tau - \beta_p \Phi_p \Omega_\gamma, \quad \gamma = 1, 2, 3, \quad (28)$$

где  $\alpha_f, \alpha_b, \alpha_p$  — коэффициенты теплового расширения волокна, полимера и пиролитической фазы матрицы;  $\beta_p$  — коэффициент усадки;  $B_\gamma, \Omega_\gamma$  — коэффициенты, зависящие от расположения волокон в композите [9].

Усилия и моменты межфазного взаимодействия  $P_{g\alpha}, M_{g\alpha}$  в оболочке определены следующим образом:

$$P_{g\alpha} = \int_{-h/2}^{h/2} p \tilde{f}_\alpha dq_3; \quad M_{g\alpha} = \int_{-h/2}^{h/2} p \tilde{f}_\alpha q_3 dq_3, \quad (29)$$

где  $\tilde{f}_\alpha$  — коэффициенты межфазного взаимодействия.

В соотношениях (20) обозначены мембранные, смешанные и изгибные жесткости оболочки  $\bar{C}_{\alpha\beta}, N_{\alpha\beta}, D_{\alpha\beta}$ :

$$\bar{C}_{\alpha\beta} = C_{\alpha\beta}^0 a_{\theta 1}^{(0)}; \quad N_{\alpha\beta} = C_{\alpha\beta}^0 a_{\theta 1}^{(1)}; \quad D_{\alpha\beta} = C_{\alpha\beta}^0 a_{\theta 1}^{(2)};$$

$$\bar{C}_{66} = C_{66}^0 a_{\theta 1}^{(0)}; \quad N_{66} = C_{66}^0 a_{\theta 1}^{(1)}; \quad D_{66} = C_{66}^0 a_{\theta 1}^{(2)}; \quad (30)$$

$$\bar{C}_{\alpha+3, \alpha+3} = C_{\alpha+3, \alpha+3}^0 a_{\theta 2}^{(0)}; \quad \alpha = 1, 2; \quad a_{\theta k}^{(j)} = \int_{-h/2}^{h/2} a_{\theta k} q_3^j dq_3; \quad k = 1, 2; \quad j = 0, 1, 2.$$

Вследствие размягчения полимерной матрицы и ее термодеструкции, жесткости оболочки изменяются при нагреве. Учет этого изменения для ортотропных композитных оболочек осуществляется с помощью двух функций  $a_{\theta 1}$ ,  $a_{\theta 2}$  [9].

Система уравнений равновесия (22), в которой подставлены определяющие соотношения (24) и кинематические соотношения (23), образует замкнутую систему: пять уравнений относительно пяти неизвестных функций  $U_\alpha$ ,  $\gamma_\alpha$ ,  $W$ .

В качестве граничных условий, например, на линии  $q_\alpha = \text{const}$ , к этой системе присоединяются заданные значения пяти величин (по одному из каждой пары):  $(T_{11} - \varphi_g P_g, u_\alpha)$ ,  $(T_{22}, u_\beta)$ ,  $(Q_\alpha, W)$ ,  $(M_{11} - \varphi_g M_g, \gamma_\alpha)$ ,  $(M_{22}, \gamma_\beta)$ .

Деформации  $\varepsilon_{\alpha\beta}$  и напряжения в оболочке вычисляются по следующим формулам:

$$\varepsilon_{\alpha\beta} = e_{\alpha\beta} + q_3 \kappa_{\alpha\beta}; \quad \alpha, \beta = 1, 2; \quad \varepsilon_{33} = 0; \quad \varepsilon_{\alpha 3} = e_{\alpha 3}; \quad (31)$$

$$\sigma_{\alpha\alpha} = -\tilde{f}_\alpha p + a_{\theta 1} \sum_{\beta=1}^3 C_{\alpha\beta} \left( \varepsilon_{\beta\beta} + q_3 \kappa_{\beta\beta} - \varepsilon_\beta^0 \right); \quad \alpha = 1, 2; \quad (32)$$

$$\sigma_{12} = a_{\theta 1} C_{66} (\varepsilon_{12} + q_3 \kappa_{12}).$$

Для поперечного нормального напряжения  $\sigma_{33}$  и напряжений межслойного сдвига  $\sigma_{\alpha 3}$  имеем формулы

$$\begin{aligned} \sigma_{33} = & 6\eta \left( \frac{(p_1 + p_2)}{2} - \frac{P_{g1}}{h} + \frac{1}{h} C_{31} \left( a_{\theta 1}^{(0)} e_{11} + a_{\theta 1}^{(1)} \kappa_{11} - \varepsilon_1^{0(0)} \right) + \right. \\ & \left. + \frac{1}{h} C_{32} \left( a_{\theta 1}^{(0)} e_{22} + a_{\theta 1}^{(1)} \kappa_{22} - \varepsilon_2^0 \right) - \frac{1}{h} C_{33}^0 \varepsilon_3^0 \right) + \\ & + (p_2 - p_1) \xi(q_3) + \frac{p_1 - p_2}{2} + \varphi_g p; \end{aligned}$$

$$\sigma_{13} = \frac{12\eta(q_3)}{h} C_{44}^0 e_{13} a_{\theta 2}^{(0)}; \quad \sigma_{23} = \frac{12\eta(q_3)}{h} C_{55}^0 e_{23} a_{\theta 2}^{(0)}; \quad (33)$$

$$\xi(q_3) = 1/2 - q_3/h; \quad \eta(q_3) = 1/4 - (q_3/h)^2; \quad \alpha = 1, 2,$$

где  $p_1, p_2$  — давления на внешних поверхностях оболочки. Максимальное значение касательных напряжений достигается на срединной поверхности, где  $\eta(0) = \frac{1}{4}$ , эти значения следующие:

$$\sigma_{13\max} = \frac{3}{h} C_{44}^0 e_{13} a_{\theta 2}^{(0)}; \quad \sigma_{23\max} = \frac{3}{h} C_{55}^0 e_{23} a_{\theta 2}^{(0)}. \quad (34)$$

**Методы численного решения сопряженной задачи.** Для численного решения сопряженной задачи вводится цикл по «медленному» времени  $\bar{t} = t/t_0$ , соответствующему процессу распространения тепла в стенке конструкции, где  $t_0$  — характерное время нагрева конструкции. Внутри этого цикла вводится «быстрое» время  $\tau = t/t_y$ , где  $t_y$  — характерное время установления газового потока. Для каждого фиксированного момента медленного времени  $\bar{t}_i$  тепловой поток на твердой стенке  $q_s = -\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\lambda}_s \cdot \nabla \theta_s$ , вообще говоря, неизвестный, полагается фиксированным, тогда системы уравнений газодинамики (1)–(4) и внутреннего теплопереноса в конструкции (11)–(13) разделяются на одном шаге «медленного» времени.

Согласно модели трехмерного пограничного слоя [12] уравнения идеального газа (1) и вязкого газа (6) также разделяются. Решение (1) находится во всей области  $V_1 + V_2$  течения газового потока с граничными условиями (2) на твердой стенке, затем полученное решение идеального потока на твердой стенке для плотности, касательных компонент скорости и температуры:  $\rho_e, v_{el} = \mathbf{v}_e \cdot \boldsymbol{\tau}_l, \theta_e$  переносится на внешнюю поверхность пограничного слоя и вместо условий (5) формулируются следующие условия для системы уравнений (1)–(3) трехмерного пограничного слоя:

$$\Sigma_e : \rho = \rho_e, \quad \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = 0, \quad \mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\tau}_l = v_{el}, \quad \theta = \theta_e. \quad (35)$$

Далее решается система уравнений (1)–(3) с условиями (6)–(10), (35) в области  $V_2$  по «быстрому» времени до установления. После этого осуществляется переход к следующему моменту  $\bar{t}_{n+1}$  «медленного» времени.

Тепловой поток  $q_{s,n+1}$  на твердой стенке на очередном  $(n + 1)$  временном шаге рассчитывается с помощью специального метода, предложенного в [18], согласно которому сначала ищется численно-аналитическое решение уравнения теплопроводности (13) только для главных членов теплового потока  $\nabla\theta_s \cdot n$  в направлении по нормали к нагреваемой поверхности (тепловыми потоками в касательной плоскости  $\nabla\theta \cdot \tau_l$  на этом шаге пренебрегается) и только с третьим граничным условием (5) (с заданной температурой поверхности). Тогда после обезразмеривания уравнение теплопроводности (15) с граничными и начальными условиями (20)–(21) принимает вид

$$\frac{\partial \bar{\theta}}{\partial \bar{t}} = \text{Fo} \frac{\partial^2 \bar{\theta}}{\partial \bar{x}^2}, \quad 0 < \bar{x} < 1; \quad (36)$$

$$\bar{x} = 0: \bar{\theta} = \bar{\theta}_w; \quad \bar{x} = 1: \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial \bar{x}} = 0; \quad \bar{t} = 0: \bar{\theta} = 1,$$

где  $\text{Fo} = \frac{\lambda_s t_0}{\rho_s c_s H}$  — параметр Фурье;  $H$  — толщина оболочки;  $\bar{\theta} = \frac{\theta}{\theta_0}$  —

безразмерная температура,  $\bar{\theta}_w = \theta_w / \theta_0$ ;  $\bar{x} = \frac{x}{H}$  — безразмерная координата по толщине оболочки. В силу линейности задачи (36) ее решение —

безразмерная температура  $\bar{\theta}(\bar{x}, \bar{t})$  и тепловой поток  $\bar{q} = \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial \bar{x}}(\bar{x}, \bar{t})$  —

являются линейными функциями от входных данных задачи: от температуры внешней поверхности  $\bar{\theta}_w$ , тогда значение теплового потока

$\bar{q}_s = \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial \bar{x}}(0, 1)$  на нагреваемой поверхности в момент времени  $\bar{t} = 1$

можно представить в виде:  $\bar{q}_s = g(\text{Fo})(\bar{\theta}_w - 1)$ , где  $g(\text{Fo})$  — некоторая функция от параметра Фурье, которую находим из формулы

$$g(\text{Fo}) = \frac{\frac{\partial \bar{\theta}}{\partial \bar{x}}(0, 1)}{(\bar{\theta}_w - 1)}. \quad (37)$$

Возвращаясь к размерным величинам, получим для теплового потока формулу Ньютона:

$$q_s = \alpha(\theta_w - \theta_0); \quad \alpha = \frac{\lambda_s g(\text{Fo})}{H}, \quad (38)$$

где  $\alpha$  — коэффициент теплообмена для твердой стенки, определяем численно. Подставляя далее выражение (38) в граничное условие (5), замыкаем итерационный цикл по «быстрому» времени.

Для цикла по «медленному» времени также используется решение (37), (38), полученное при различных значениях параметра Фурье  $Fo$  (изменение значений  $Fo$  определяется изменением значений характерного «медленного» времени  $t_0$ ).

Численный метод решения задачи газодинамики (1)–(3) для идеального газа описан в работах [15, 19]. Для численного решения задачи термоупругости (22)–(24) оболочки из композитного материала применялся метод конечного элемента, алгоритм которого описан в работе [14]. Решение задачи термоупругости осуществлялось только для шагов «медленного» времени. Входными данными для этой задачи являлись давления на внешней и внутренней поверхности оболочки  $p_1, p_2$ , которые вычислялись с помощью предварительного решения задачи аэрогазодинамики, а также распределения температуры  $\theta$ , объемных концентраций фаз  $\varphi_f, \varphi_b, \varphi_p, \varphi_g$  и порового давления  $p$  газообразных продуктов терморазложения композита в области  $V_s$  оболочки, рассчитанные с помощью предварительного решения задачи внутреннего теплопереноса (11)–(13) к рассматриваемому моменту времени.

**Результаты численного моделирования.** Результаты численного моделирования обтекания фрагмента корпуса модельного летательного аппарата гиперзвуковым потоком газа представлены на рис. 2–6. Начальные условия и скорость набегающего потока (граничное условие на входной границе) задавались равными друг другу и имели вид  $\rho = 0,195 \text{ кг/м}^3$ ;  $v_x = v_y = 0 \text{ м/с}$ ;  $v_z = 1800 \text{ м/с}$ ;  $p = 12\,346 \text{ Па}$ . Значения размерных параметров задачи принимались равными:  $\theta_0 = 293 \text{ К}$ ,  $\varepsilon_1 = 0,8$  и  $\varepsilon_2 = 0,3$ ;  $\lambda_s = 0,3 \text{ Вт/(м}\cdot\text{К)}$ ;  $\rho_s = 1800 \text{ кг/м}^3$ ;  $c_s = 0,8 \text{ кДж/(кг}\cdot\text{К)}$ .

Численное решение с хорошим разрешением воспроизводит головной скачок уплотнения в критической точке ЛА, позволяет выявить максимумы плотности, давления и температуры, которые располагаются в окрестности критической точки носовой части ГЛА, в которой температура достигает 2000 К. Было проведено сравнение двух вариантов расчетов температуры внешнего газового потока: при адиабатической стенке конструкции ГЛА и с учетом теплообмена между внешней газовой средой и оболочкой. Было установлено, что во втором случае температура в среднем по поверхности тела получается ниже на 25 %, чем в первом, что свидетельствует о необходимости детального анализа теплообмена между внешним газовым потоком и конструкцией оболочки ГЛА для оценки предельных режимов и выбора материалов теплозащиты.

На рис. 1 и 2 представлены результаты расчетов параметров аэрогазодинамического потока — давления и температуры — в момент времени  $t = 0$ . В соответствии с указанной выше методикой расчеты проводились сначала для идеального газа во всей рассматриваемой области обтекания, а затем для вязкого газа в рамках модели трехмерного погранслоя.

На рис. 2 представлены результаты численных расчетов полей внутреннего теплопереноса в оболочке элемента ГЛА: распределение температуры и порового давления на внешней поверхности конструкции для максимального времени расчета  $t_{\max}$  прогрева конструкции. Терморазложение полимерной фазы композитной оболочки приводит к образованию большого количества газообразных продуктов в порах материала. Ввиду низкой газопроницаемости композита образующиеся газы не успевают отфильтровываться во внешний газовый поток и создают внутреннее поровое давление.

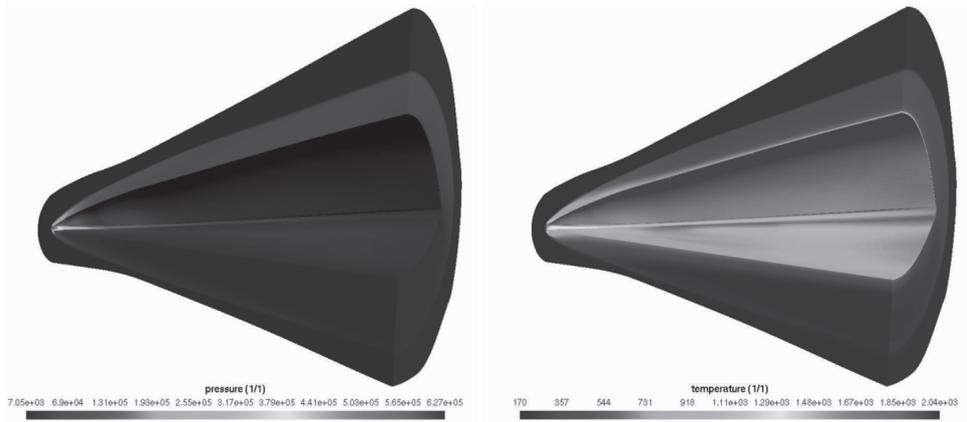


Рис. 1. Распределение давления газового потока  $p$  (Па) и температуры газового потока  $\theta$  (К), набегающего на конструкцию ГЛА

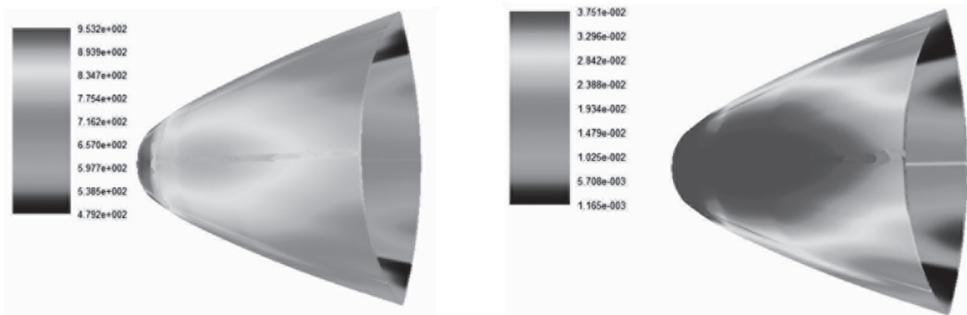


Рис. 2. Распределение температуры  $\theta$  (К) поверхности оболочки и максимального значения порового давления  $p_m$  (ГПа) газообразных продуктов термодеструкции в оболочке ГЛА в момент времени  $t = t_m$

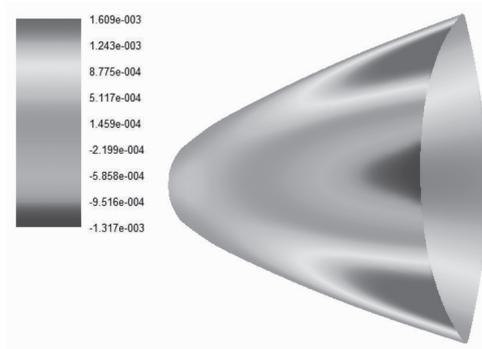


Рис. 3. Прогиб  $W$  (м) оболочки ГЛЖ в момент времени  $t = t_m$

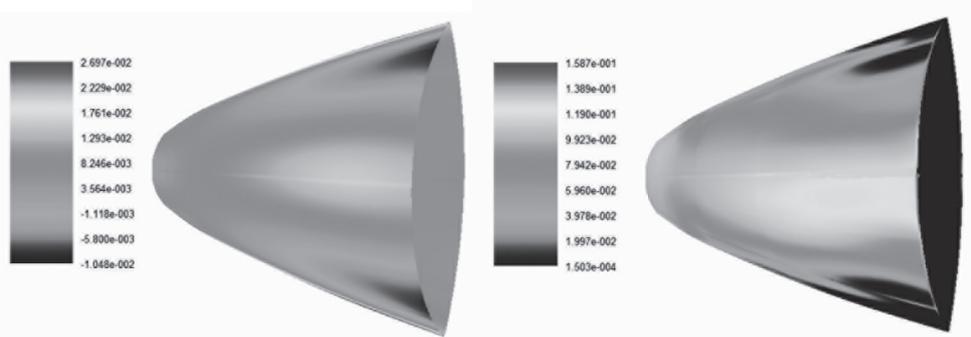


Рис. 4. Распределение окружного напряжения  $\sigma_{22}$  и поперечного напряжения  $\sigma_{33}$  в оболочке (ГПа) на внутренней поверхности оболочки в момент времени  $t = t_m$

На рис. 3 и 4 показаны распределения прогиба оболочки, окружных напряжений на внешней поверхности и поперечных напряжений на внешней нагреваемой поверхности оболочки в момент времени максимального ее прогрева. В процессе нагрева сжимающие окружные напряжения постепенно увеличивают свои значения, вместе с этим увеличиваются и максимальные растягивающие значения окружного напряжения на периферийной части оболочки ближе к кромкам оболочки. В момент времени максимального прогрева возникает пик положительных растягивающих напряжений, обусловленный термодеструкцией композита, вследствие которой возрастает поровое давление газообразных продуктов терморазложения матрицы, а также возникают усадочные деформации оболочки. К максимальному моменту времени прогрева оболочки значения поперечных напряжений на нижней части оболочки достигают 0,13 ГПа, что значительно превышает предел прочности композитной оболочки в поперечном направлении. В результате в этой части оболочки может возникнуть разрушение по типу расслоения, при котором верхние слои ткани композита отслоятся от остальной части материала. Следует отметить, что полученные

результаты существенным образом зависят от режимов обтекания оболочки внешним газовым потоком.

**Выводы.** В настоящей работе сформулирована постановка сопряженной задачи аэрогазодинамики, термopочности конструкций гиперзвуковых летательных аппаратов внутреннего теплопереноса. Предложен метод численного решения этой задачи, основанный на введении двух временных масштабов — «медленного» и «быстрого» времени. Приведены примеры численного решения сопряженной задачи аэрогазодинамики и термopочности элементов теплозащитных конструкций перспективного ЛА. Показано, что вследствие высоких температур аэродинамического нагрева конструкций из полимерных композиционных материалов, в них может происходить терморазрушение из-за термодеструкции полимерной фазы и образования интенсивного внутреннего газообразования в материалах конструкции.

*Исследования выполнены при финансовой поддержке грантов Президента РФ МК-3150.2012.8 и МК-3218.2013.8 и Министерства образования и науки РФ (номер НИР 1.5433.2011). Результаты моделирования были получены с использованием суперкомпьютера СКИФ МГУ им. М.В. Ломоносова «Чебышев».*

## ЛИТЕРАТУРА

- [1] Anderson J. D., *Hypersonic and High-Temperature Gas Dynamics*. 2nd ed. Reston, Virginia. American Institute of Aeronautics and Astronautics, 2006. 232 p.
- [2] Лунёв В.В. *Гиперзвуковая аэродинамика*. Москва, Машиностроение, 1975, 330 с.
- [3] *Гиперзвуковая аэродинамика и теплообмен спускаемых космических аппаратов и планетных зондов*. Москва, ФИЗМАТЛИТ, 2011, 548 с.
- [4] Лесин А.Б., Лунёв В.В. Аномальный теплообмен на треугольной пластине с затупленным носком в гиперзвуковом потоке. *Механика жидкости и газа*, 1994, № 2.
- [5] Jack J. McNamara, Peretz P. Friedmann. Aeroelastic and Aerothermoelastic Analysis of Hypersonic Vehicles: Current Status and Future Trends// 48th AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC Structures, Structural Dynamics, and Materials Conference, 23–26 April 2007, Honolulu, Hawaii (<http://www.mecheng.osu.edu/lab/cael/sites/default/files/AIAA-2007-2013>)
- [6] Crowell A.R., McNamara J.J., Miller B.A., Hypersonic Aerothermoelastic Response Prediction of Skin Panels Using Computational Fluid Dynamic Surrogates. *ASD Journal*, 2011, vol. 2 (2), pp. 3–30.
- [7] Полежаев Ю.В., Юревич Ф.Б. *Тепловая защита*. Москва, Энергия, 1976, 368 с.
- [8] Хусаинов М.А. *Термopочность тугоплавких материалов, полученных газофазным осаждением*. Ленинград, ЛГУ, 1979, 158 с.
- [9] Димитриенко Ю.И. *Механика композиционных материалов при высоких температурах*. Москва, Машиностроение, 1997, 366 с.

- [10] Dimitrienko Yu.I. Thermal stresses and heat mass-transfer in ablating composite materials. *International Journal of Heat Mass Transfer*, 1995, vol. 38 (1), p. 139–146.
- [11] Dimitrienko Yu.I. Thermal Stresses in Ablative Composite Thin-Walled Structures under Intensive Heat Flows. *International Journal of Engineering Science*, 1997, vol. 35 (1), p. 15–31.
- [12] Димитриенко Ю.И., Захаров А.А., Коряков М.Н. Модель трехмерного пограничного слоя и ее численный анализ // *Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки*. Спец. вып., 2011, с. 136–150.
- [13] Димитриенко Ю.И., Захаров А.А., Коряков М.Н., Сыздыков Е.К. Численное решение сопряженной задачи аэрогазодинамики и внутреннего теплопереноса в конструкциях гиперзвуковых летательных аппаратов. *Инженерный журнал: наука и инновации*, 2012, вып. 11. URL: <http://engjournal.ru/catalog/mathmodel/aero/426.html>
- [14] Димитриенко Ю.И., Минин В.В., Сыздыков Е.К. Численное моделирование процессов тепломассопереноса и кинетики напряжений в термодеструктурирующих композитных оболочках. *Вычислительные технологии*, 2012, т. 17, № 2, с. 44–60.
- [15] Димитриенко Ю.И., Котенев В.П., Захаров А.А. *Метод ленточных адаптивных сеток для численного моделирования в газовой динамике*. Москва, ФИЗМАТЛИТ, 2011, 286 с.
- [16] Краснов Н.Ф. *Аэродинамика. В 2 т.* Москва, Высш. школа, 1980, т. 1, 495 с., т. 2, 416 с.
- [17] Димитриенко Ю.И. *Тензорное исчисление*. Москва, Высшая школа, 2001, 575 с.
- [18] Dimitrienko Yu.I., Efremov G.A., Chernyavsky S.A. Optimal Designing of Erosion-Stable Heat-Shield Composite Materials. *Int. Journal of Appl. Composite Materials*, 1997, vol. 4 (1), p. 35–52.
- [19] Димитриенко Ю.И., Коряков М.Н., Захаров А.А., Сыздыков Е.К. Развитие метода ленточно-адаптивных сеток на основе схем TVD для решения задач газовой динамики. *Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. естественные науки*, 2011, № 2, с. 87–97.

Статья поступила в редакцию 27.06.2013

Ссылку на эту статью просим оформлять следующим образом:

Димитриенко Ю.И., Захаров А.А., Коряков М.Н., Сыздыков Е.К., Минин В.В. Численное решение сопряженной задачи гиперзвуковой аэродинамики и термомеханики термодеструктурирующих конструкций. *Инженерный журнал: наука и инновации*, 2013, вып. 9. URL: <http://engjournal.ru/catalog/mathmodel/aero/1114.html>

**Димитриенко Юрий Иванович** родился в 1962 г., окончил МГУ им. М.В. Ломоносова в 1984 г. Д-р физ.-мат. наук, профессор, заведующий кафедрой «Вычислительная математика и математическая физика» МГТУ им. Н.Э. Баумана. Автор более 250 научных работ в области механики сплошной среды, вычислительной механики, нелинейной механики деформируемых сред, термомеханики композитов, математического моделирования в науке о материалах, моделирования в экономике.  
e-mail: dimit.bmstu@gmail.com

**Захаров Андрей Алексеевич** родился в 1983 г., окончил МГТУ им. Н.Э. Баумана в 2005 г. Канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры «Вычислительная математика и математическая физика» МГТУ им. Н.Э. Баумана. Автор более 20 научных работ в области вычислительной газодинамики, компьютерной геометрии и разработки автоматизированных вычислительных технологий.

**Коряков Михаил Николаевич** родился в 1987 г., окончил МГТУ им. Н.Э. Баумана в 2010 г. Аспирант кафедры «Вычислительная математика и математическая физика» МГТУ им. Н.Э. Баумана. Автор 10 работ в области вычислительной газодинамики.

**Сыздыков Елтуган Кимашевич** родился в 1956 г., окончил Казанский авиационный институт в 1979 г. Канд. техн. наук, заместитель генерального директора ОАО «ГосМКБ „Радуга“ им. А.Я. Березняка». Автор более чем 100 научных работ по проектированию летательных аппаратов и механике композитных конструкций.  
e-mail: fs11@bmstu.ru

**Минин Валерий Владимирович** — канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры «Вычислительная математика и математическая физика» МГТУ им. Н.Э. Баумана.  
e-mail: valery.minin76@gmail.com