УДК 62–50

Вероятностная неопределенность в стохастических технических системах управления

© К.А. Пупков

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, 105005, Россия

Показана возможность применения обобщенного полиномиального хаоса для исследования устойчивости стохастических динамических систем с вероятностной неопределенностью. Определены виды неопределенностей. Даны и оценены различные виды неопределенностей, показаны направления их учета при исследовании стохастических динамических систем. Рассмотрено множество ортогональных полиномов, дан анализ их свойств. Для различных функций плотности вероятности неопределенности получены их разложения в виде ортогональных полиномов. Приведен пример практического применения обобщенного полиномиального хаоса для построения модели стохастической системы, позволяющий представить исходную систему в виде детерминированной, но более высокой размерности. В качестве возможного варианта исследования стохастических систем с неопределенностью рассмотрена функция плотности распределения Коши.

Ключевые слова: *неопределенность, стохастические системы, полиномиальный хаос, Монте-Карло.*

На определенном этапе развития теории управления синтез законов управления осуществлялся на основе того, что мы априори точно знаем модели объекта управления, модели воздействий на систему управления и ее структуру. Такое представление приводило к тому, что синтезированное управление оказывалось не в полной мере адекватным всей динамике реальной системы и воздействий на нее.

Такая неадекватность сопряжена с тем, что мы принципиально не можем отобразить точно в моделях свойства реальных систем, т. е. действительно существует некая неопределенность, имеющая в системах следующие виды:

- параметрический;
- по начальным условиям;
- по воздействиям окружающей среды;
- по структуре системы.

Одним из направлений преодоления неопределенности является построение адаптивных систем. Однако построение в системе контуров адаптации приводит к значительному усложнению системы и, в общем случае, снижению ее надежности. Кроме того, алгоритмы адаптации плохо работают при плохо определенных моделях. Не отвергая такого направления преодоления неопределенностей, теория управления начала развиваться по пути синтеза робастного управления, т. е. такого управления, при котором обеспечивается устойчивость и допустимая точность ее работы, конечно, при известных диапазонах неопределенностей. Предполагалось также, что робастность управления достигается при граничных значениях неопределенностей и тем самым обеспечивается гарантия желаемого функционирования. Однако робастное управление, построенное по граничным значениям неопределенности, могло существенно ухудшать динамические свойства системы, например, сужать полосу частот пропускания, а следовательно, отрицательно влиять на динамическую точность. Это связано с тем, что на самом деле в интервале неопределенности некоторое конкретное ее значение является значением случайной величины и во многих практических системах распределение ее не является равномерным. Поэтому возникла и стала развиваться задача синтеза робастного управления при предположении, что функция плотности вероятности неопределенности имеет другие типы, например, гауссова, Коши и др.

Здесь определилась проблема: каким образом при синтезе управления учесть вероятностный характер неопределенностей.

При этом необходимо решать две задачи:

- устойчивости;
- оптимизации управления.

Конечно, при исследовании устойчивости и точности работы неопределенных систем управления можно применить метод Монте-Карло, т. е. метод статистических испытаний. Для этого надо иметь цифровую модель системы, накопить при моделировании множество реализаций процессов управления и по ним оценить эффективность работы системы. Следует заметить, что достаточно объемный способ оценки — это, по сути, вычислительный эксперимент. Альтернативой ему является аппроксимация стохастических динамических систем функциональными рядами.

Здесь мы рассмотрим аналитический метод исследования устойчивости и синтеза робастного управления в неопределенных системах, где неопределенность — вероятностная с априори известной функцией распределения.

Для решения этой задачи обратимся к теории полиномиального стохастического хаоса.

Сначала изучим свойства ортогональных полиномов.

Рассмотрим множество полиномов

$$\{Q_n(x),\, n \in N\},$$

где $Q_n(x)$ — полином степени n и $N = \{0, 1, 2, \ldots\}$, если ряд бесконечен. Для конечного ряда N есть конечные неотрицательные целые числа.

Система полиномов ортогональна по отношению к действительной положительной мере $\gamma(x)$, если

$$\int_D Q_n(x)\, Q_m(x)\, d\gamma(x) = h_n^2 \delta_{nm}.$$

Для $n, m \in N$, где D — область меры $\gamma(x)$ и h_n — положительные константы; δ_{nm} — функция Кронекера, такая, что при $n \neq m$ $\delta_{nm} = 0$, а при $n = m$ $\delta_{nm} = 1$.

Если $h_n = 1$, то ряд ортонормированный.

В общем, $\gamma(x)$ может быть непрерывной весовой функцией $w(x)$ и тождественной плотности вероятности.

Ортогональные полиномы можно получить путем непрерывного оператора Родригеса

$$Q_n = \frac{1}{w(x)} \frac{d^n}{dx^n}\Big(w(x)\alpha^n(x) \Big),$$

$a^n(x)$ — полином степени n.

Здесь мы будем считать, что $w(x)$ — функция плотности вероятности.

Теперь рассмотрим и определим, что такое однородный хаос (ОХ).

Классификация ОХ впервые введена Н. Винером (1938) и стала продолжением работы Вольтерра по обобщению ряда Тейлора для функционалов [1]. ОХ использует ортогональные полиномы Эрмита для приближения гауссовых случайных переменных. Камерон и Мартин использовали функционалы Эрмита для создания ортогонального базиса нелинейных функционалов и показали, что с помощью функционалов можно аппроксимировать любые функционалы с конечным вторым моментом в L_2 и что эти функционалы действительно сходятся в смысле L_2.

Таким образом, можно использовать Эрмит-хаос для описания любых процессов второго порядка и чтобы этот процесс имел конечный момент второго порядка в терминах ортогональных полиномов.

Тем не менее большинство физических процессов в действительности соответствует этому требованию и поэтому оно практически приемлемо.

Введем понятие ОХ.

Определим множество всех интегрируемых с квадратом случайных переменных θ.

Пусть $\left\{\xi_i(\theta)\right\}_{i=1}^{\infty}$ будет множеством ортогональных гауссовых случайных переменных и пусть $\hat{\Gamma}$ будет пространством всех множеств в $\{\xi_i(\theta)\}_{i=1}^{\infty}$, меньшим и равным p. Кроме того, Γ_p будет представлять множество всех полиномов, которые ортогональны множеству $\hat{\Gamma}_{p-1}$. Пространство, замещенное Γ_p, обозначим $\bar{\Gamma}_p$.

Это пространство является подпространством $\theta\left(\bar{\Gamma}_p \subseteq \theta\right)$ и называется p-й однородный хаос. Γ_p — полиномиальный хаос (ПХ) p-порядка.

Теперь можем записать любой общий второго порядка случайный процесс как

$$\left(\theta\right) = \sum_{p\geq 0} \sum_{n_1+\ldots n_r=p} \sum_{p_1,\ldots,p_r} \Gamma_p\left(\xi_{p_1}\left(\theta\right),\ldots,\xi_{p_r}(\theta)\right)$$

или как линейную комбинацию всех полиномиальных хаосов порядка $p \geq 0$.

Полиномы в этом уравнении включают в себя r отдельных случайных переменных на $\left\{\xi_i(\theta)\right\}_{i=1}^{\infty}$, с k-й случайной переменной, содержащей многообразие n_k, и конечное значение включенных случайных переменных равно порядку ПХ — p.

Если предположить, что ПХ — симметричный, то приведенное выше уравнение можно упростить, а именно:

$$\left(\theta\right) = a_0\Gamma_0 + \sum_{i=1}^{\infty} a_{i_1}\Gamma_1\left(\xi_{i_1}\left(\theta\right)\right) + \sum_{i_1=1}^{\infty}\sum_{i_2=2}^{i_1} a_{i_1}a_{i_2}\Gamma_2(\xi_{i_1}(\theta)\times$$

$$\times\xi_{i_2}(\theta)) + \sum_{i_1=1}^{\infty}\sum_{i_2=2}^{i_1}\sum_{i_3=3}^{i_2} a_{i_1 i_{2,} i_3}\Gamma_3\left(\xi_{i_1}\left(\theta\right)\xi_{i_2}\left(\theta\right)\xi_{i_3}\left(\theta\right)\right)+\ldots,$$

где $\Gamma_p(\bullet)$ — ПХ p-порядка.

Для случая однородного хаоса с гауссовыми переменными ξ с нулевым средним значением и единичной дисперсией эти полиномы являются полиномами Эрмита, и мы их будем выражать как

$$\Gamma_p = H_p \text{ (член } \xi = \left(\xi_{i_1}, \xi_{i_2}, \ldots, \xi_{i_n}\right)).$$

Эти полиномы имеют вид

$$H_n\left(\xi_{i_1},\ldots,\xi_{i_n}\right) = \ell^{-\frac{1}{2}\xi^T\xi(-1)^n} \frac{d^n}{d\xi_{i_1}\ldots d\xi_{i_n}} \ell^{-\frac{1}{2}\xi^T\xi}$$

Для удобства $X(\theta)$ можно записать следующим образом:

$$X\left(\theta\right) = \sum_{i=0}^{\infty} \hat{a}_i \bar{\Psi}_i\left(\xi\right),$$

Здесь однозначное соответствие между $\Psi_i(\xi)$ и $H_p\left(\xi_{i_1},\ldots,\xi_{i_n}\right)$, а также между коэффициентами $\hat{a}_i$ и $a_{i,\ldots,n}$.

Чтобы представить форму суммирования в уравнении (1) для $X(\theta)$ и соотношение Ψ_i с H_n в уравнении (2), рассмотрим разложение для двух случайных переменных:

$$X\left(\theta\right) = a_0H_0 + a_1H_1(\xi_{1)} + a_2H_1\left(\xi_2\right) + a_{11}H_2\left(\xi_1,\xi\ \ \right) + a_{12}H_2\left(\xi_2,\xi_1\right) +$$
$$+a_{22}H_2\left(\xi_2,\xi_2\right) + a_{111}H_3\left(\xi_1,\xi_{1,}\xi_1\right) + a_{121}H_3\left(\xi_2,\xi_1,\xi_1\right) + a_{211}H_3\left(\xi_2,\xi_{21}\xi_1\right) +$$
$$+a_{222}H_3\left(\xi_2,\xi_2,\xi_2\right) + \ldots$$

Члены этого разложения связаны с членами в уравнении (2) таким образом:

$$\hat{a}_0\Psi_0 = a_0H_0; \hat{a}_1\Psi_1 = a_1H_1\left(\xi_1\right); \hat{a}_2\Psi_2 = a_2H_1\left(\xi_2\right) \text{ и т. д.}$$

Полиномы ОХ формируют ортогональный базис, что означает среднее

$$\Psi_i\Psi_j = \Psi_i^2\delta_{ij},$$

где δ_{ij} — функция Кронекера; $\left\langle \bullet\bullet \right\rangle$ — среднее взвешенное произведение.

При этом оператор $\left\langle \Psi_i^2 \right\rangle$ в некоторых случаях можно описать численно:

$$\left\langle xy \right\rangle = \sum\nolimits_{i=1}^{\infty} x_i y_i \text{, где } x = [x:],\ y = [y_i];$$

матрично

$$\left\langle xy \right\rangle = y^{\mathrm{T}}\mathrm{M}x \text{, где M — матрица Эрмита;}$$

в случайной форме

$$\left\langle xy \right\rangle = E\left(xy\right) \text{ и}$$

квадратной матрицей

$$\left\langle A,B \right\rangle = \left(B^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}\right).$$

Для Эрмитова хаоса произведение $\langle\bullet,\bullet\rangle$ на гильбертовом пространстве определяется на основе гауссовых переменных

$$\left\langle f\left(\xi\right)g\left(\xi\right) \right\rangle = \int f\left(\xi\right)g\left(\xi\right)w\left(\xi\right)d\xi,$$

где весовая функция $w(\xi)$ равна

$$w(\xi) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n}} \ell^{-\frac{1}{2}\xi^T \xi}$$

Переменная n имеет размерность вектора случайной переменной ξ.

Весовая функция $w(\xi)$ эквивалентна функции плотности вероятности для независимых n-мерных гауссовых распределений. Таким образом, базис полиномов Эрмитова хаоса ортогонален относительно гауссова распределения, и переменные в разложении являются гауссовыми случайными переменными.

Таким образом, ОХ (ЭХ) можно использовать в ситуации, когда стохастическая неопределенность в системе известна как гауссова.

Теперь рассмотрим, каким образом можно построить множество ортогональных полиномов. Суть состоит в том, что функция веса *w(x)* в реальных случаях не обязательно является нормальной. Например, это может быть распределение Коши:

$$f(x) = \frac{K}{\pi\left[K^2 + (x-\mu)^2\right]},$$

где $-\infty < x < \infty$,; K и μ — вещественные константы и $K > 0$.

Кроме того, область определения полиномов Эрмита бесконечна. На практике часто необходимо генерировать множество ортогональных полиномов с желаемой областью определения. Это можно сделать несколькими способами, в том числе с помощью процесса Грамма — Шмидта, который включает в себя множество ортогональных функций $\left\{\phi_i(x)\right\}_{i=0}^{\infty}$ из множества линейных независимых функций $\left\{u_i(x)\right\}_{i=0}^{\infty}$ с весовой функцией $w(x)$.

Для начала зададим

$$\phi_0(x) = u_0(x).$$

Следующая функция $\phi_i(x)$ может быть определена из $\phi_0(x)$ путем вычитания из нее проекции $u_i(x)$ в $\phi_0(x)$:

$$\phi_1 = u_1(x) - \frac{\langle u_i(x)\phi_0(x)\rangle}{\langle \phi_0(x)^2\rangle}\phi_0(x),$$

где

$$\langle f(x)g(x)\rangle = \int f(x)g(x)w(x)\,dx.$$

Чтобы теперь проверить, что $\phi_1(x)$ ортогональна к $\phi_0(x)$, рассмотрим скалярное произведение

$$\left\langle \phi_0(x)\phi_1(x)\right\rangle = \left\langle \phi_0(x)u_1(x)\right\rangle - \frac{\left\langle u_i(x)\phi_0(x)\right\rangle}{\left\langle \phi_0(x)^2\right\rangle}\times$$

$$\times\left\langle \phi_0(x)\phi_0(x)\right\rangle = \left\langle \phi_0(x)u_1(x)\right\rangle - \left\langle \phi_0(x)u_1(x)\right\rangle = 0$$

В общем виде имеем

$$\phi_1 = u_1(x) - \sum_{i=0}^{\infty}\frac{\left\langle u_i(x)\phi_k(x)\right\rangle}{\left\langle \phi_k(x)^2\right\rangle}\phi_k(x).$$

Пример. Рассмотрим генерацию множества ортогональных полиномов по отношению к весовой функции

$$w(x) = \ell^{-\frac{x^2}{2}}\ x \in (-\infty, \infty).$$

Примем $u_i(x) = x_i$ для $i = 0, 1, \ldots, \infty$.

Первый полином

$$\phi_0(x) = u_0(x) = 1,$$

чтобы найти

$$\phi_1(x) = x - \frac{\langle x\cdot 1\rangle}{\langle 1\cdot 1\rangle}.$$

Теперь

$$\langle 1\cdot 1\rangle = \int_{-\infty}^{\infty}\ell^{-x^2}dx = \sqrt{2\pi}\ \text{ и }\ \langle x\cdot 1\rangle = \int_{-\infty}^{\infty}x\ell^{-x^2}dx = 0.$$

Так что

$$\phi_1(x) = x - \frac{0}{2\pi} = x.$$

Находим

$$\phi_2(x) = x^2 - \frac{\left\langle x^2\right\rangle}{\langle 1\rangle} - \frac{\left\langle x^3\right\rangle}{\left\langle x^2\right\rangle},$$

где $\left\langle x^2\right\rangle = 2\pi$ и $\left\langle x^3\right\rangle = 0$.

Получим

$$\phi_2(x) = x^2 - 1,\ \phi_3(x) = x^3 - 3x \text{ и т. д.}$$

Это и есть полиномы Эрмита.

Применение идеи ПХ приводит к преобразованию стохастической динамической линейной системы с $x \in R^n$; $u \in R^m$ с p-м порядком ПХ приводит к детерминированной линейной системе с более высокой размерностью $n(p+1)$.

Пример. Рассмотрим систему

$$\dot{x}(t,\Delta) = a(\Delta)x(t,\Delta),$$

где $a(\Delta) = \overline{a}_0 + \overline{a}_2\Delta^2, \Delta \in [-1,1]$, т. е. случайная величина с равномерным распределением и $\overline{a}_i, i = 0,2$ известна.

Поскольку Δ — равномерно распределенная случайная величина, будем использовать полиномы Лежандра для моделирования каждого из процессов.

В примере будем использовать полиномы до 3-го порядка. Разложение x здесь

$$x(t,\Delta) = \sum_{i=0}^{3} a_i \phi_i(\Delta)$$

и разложение для $a(\Delta)$ —

$$a(\Delta) = \sum_{i=0}^{3} a_i \phi_i(\Delta).$$

Полиномы Лежандра (первые три):

$$\phi_0 = 1,$$
$$\phi_1 = \Delta,$$
$$\phi_2 = \frac{3}{2}\Delta^2 - \frac{1}{2},$$
$$\phi_3 = \frac{5}{2}\Delta^3 - \frac{3}{2}\Delta.$$

Ясно, что по формуле для $a(\Delta)$ разложение будет

$$a(\Delta) = \left(\overline{a}_0 + \frac{1}{3}\overline{a}_2\right)\phi_0 + \frac{2}{3}\overline{a}\phi_2.$$

Тогда уравнение движения

$$\sum_{j=0}^{3} \dot{x}_j \phi_j = \left(\sum_{k=0}^{3} a_k \phi_k\right)\left(\sum_{i=0}^{3} \phi_i\right) = \sum_{i=0}^{3}\sum_{k=0}^{3} a_k x_i \phi_k \phi_i.$$

Если спроектировать обе части в ϕ_j и разделить на $\left\langle \phi_j^2 \right\rangle$, получим

$$\dot{x}_j = \frac{1}{\left\langle \phi_j^2 \right\rangle} \sum_{i=0}^{3} \sum_{k=0}^{3} \left\langle \phi_k \phi_i \phi_j \right\rangle =$$

$$= \frac{1}{\left\langle \phi_j^2 \right\rangle} \left(\sum_{k=0}^{3} a_k \left[\left\langle \phi_k \phi_j \phi_0 \right\rangle \left\langle \phi_k \phi_j \phi_i \right\rangle \left\langle \phi_k \phi_j \phi_2 \right\rangle \left\langle \phi_k \phi_j \phi_3 \right\rangle \right] \right) X,$$

где $X = [x_0, x_1, x_2, x_3]^{\mathrm{T}}$.

Структура может быть легко идентифицирована как j-строка матрицы вида

$$\Psi_k = \begin{bmatrix} \hat{\ell}_{0k0} & \hat{\ell}_{0k1} & \cdots & \hat{\ell}_{0kp} \\ \hat{\ell}_{0k1} & \hat{\ell}_{1k1} & \cdots & \hat{\ell}_{0k1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \hat{\ell}_{0kp} & \hat{\ell}_{1kp} & \cdots & \hat{\ell}_{pkp} \end{bmatrix}$$

Теперь, поскольку только два ненулевых коэффициента в разложении $a(\Delta)$, уравнение движения может быть записано так:

$$X = \left(a_0 \Psi_0 + a_2 \Psi_2 \right) X = \left(\left(\overline{a}_0 + \frac{1}{2} a_2 \right) \Psi_0 + \frac{2}{3} \overline{a}_2 \Psi_2 \right) X .$$

Таким образом, можно описать динамику линейной стохастической системы. Эту процедуру можно повторить для полиномов более высокого порядка с целью лучшего приближения.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Winer N. The Homogenous chaos. *J. of Mathematics*, 1938, pp. 897–936.

[2] M. Schetzen. *The Volterra and Wiener Theories of Nonlinear Systems*. Melbourne, FL: Krieger Publishing Company, 2006.

[3] Xiu D., Karniadakis G.E. «The winer-askey polynomial chaoc for stochastic differential equations», *SIAM J. Sci. Comput.*, 2002, vol. 24, pp. 619–644.

[4] Пупков К.А., Капалин В.И., Ющенко А.С. Функциональные ряды в теории нелинейных систем. Москва, Наука, 1976.

Статья поступила в редакцию 28.06.2013

Ссылку на эту статью просим оформлять следующим образом:

Пупков К.А. Вероятностная неопределенность в стохастических технических системах управления. *Инженерный журнал: наука и инновации*, 2013, вып. 10. URL: http://engjournal.ru/catalog/it/nav/1096.html

Константин Александрович Пупков родился в 1930 г., окончил МВТУ им. Н.Э. Баумана в 1954г. Д-р техн. наук, профессор МГТУ им. Н.Э. Баумана, заведующий кафедрой Кибернетики и мехатроники РУДН. Автор более 30 монографий, учебников и учебных пособий в области теории управления и интеллектуальных систем. e-mail: pupkov@iu1.bmstu.ru