УДК 517.97

Нечеткая оптимизационная задача о быстродействии

© И.А. Мочалов[1], М.С. Хрисат[2]

[1] МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, 105005, Россия
[2] Российский университет дружбы народов, Москва, 117198, Россия

На основе решения нечеткой вариационной задачи и теории нечетких линейных систем разработан алгоритм синтеза нечеткого управления при ограничении на управление для нечеткой задачи Лагранжа (задачи о быстродействии). Приведен пример построения оптимальной нечеткой фазовой траектории и нахождении «сильного или слабого» времени перехода из нечетких состояний.

Ключевые слова: *нечеткие задачи оптимизации, нечеткие линейные системы, нечеткая фазовая траектория, нечеткая задача о быстродействии.*

Введение. Настоящая статья является продолжением серии статей одного из авторов по применению теории нечетких линейных систем (НЛС) и нечетких вычислений к решению оптимизационных задач управления [1—5]. Далее будут использованы базовые понятия теории нечетких множеств: нечеткое число; нечеткая функция; ее непрерывность, дифференцируемость, интегрируемость и другие базовые понятия нечеткого математического анализа, а также нечеткий функционал, используемый в нечетком вариационном исчислении. Ниже рассматривается нечеткая оптимизационная задача о быстродействии для динамической системы.

1. Постановка задачи. Имеем модель динамического объекта в пространстве состояний:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + B.$$

$U(t),\, t \in \left[t_1, t_2\right] = T$ — промежуток функционирования; $x^{\tau} = \left(x_1, ..., x_n\right)$ — вектор состояния; $u^{\tau} = \left(u_1, ..., u_q\right)$ — вектор управления. Для объекта заданы нечеткие граничные условия:

$$x_1(t=0) = x_{1\text{Н}};$$
$$x_2(t=0) = x_{2\text{Н}},$$

где $x_{1\text{Н}}$, $x_{2\text{Н}}$ — нечеткие числа с заданными функциями принадлежностей $r(x_1) = r_1,\, r(x_2) = r_2; r_1, r_2 \in [0;1];\, x_1, x_2 \in R_1$.

Задан функционал качества управления:

$$I\left(x, u, t\right) = I_1\left(x, u, t\right) + I_2\left(x_1, x\left(t_1\right)\right),$$

где $I_1(\cdot)=\int_{t_1}^{t_2} L(x,u,t)\,dt$, $L(\cdot)$ — интегрант, $I_2(\cdot)$ — терминальный член. Необходимо найти $\min_{u(t)} I(x, u, t)$ или, в символической форме, М = НГУ = $I \to \min I$, где М — модель; НГУ — нечеткие граничные условия; I — функционал. Для получения интерпретируемых в геометрической форме результатов рассмотрим частную задачу об успокоении материальной точки [6,7], для которой решается нечеткая задача о быстродействии (нечеткая задача Лагранжа).

Имеем

1) $\begin{cases}\dot{x}_1 = x_2\\ x_2 = u\end{cases}$ — модель объекта управления; u — управление;

2) $\begin{matrix} x_1(t=0)=x_{1\text{Н}}=\left(\underline{x}_1(r),\overline{x}_1(r)/r\in[0;1]\right);\\ x_2(t=0)=x_{2\text{Н}}=\left(\underline{x}_2(r),\overline{x}_2(r)/r\in[0;1]\right)\end{matrix}$ —

нечеткие граничные условия, представленные в уровневой форме, Н — индекс нечеткости;

3) $|u|\le 1$ — ограничение на управление;

4) $I=\int_0^{T_\text{Н}} dt = T_\text{Н}$ — функционал качества управления.

В условиях (1– 4) необходимо найти $\min_u T_\text{Н}$ (рис. 1).

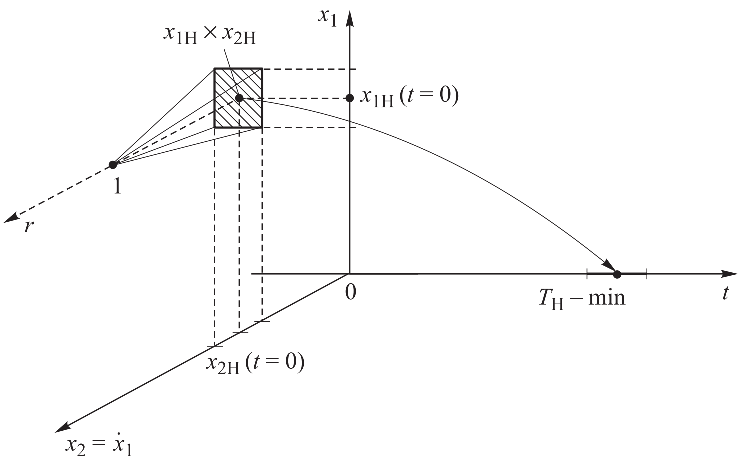

Рис. 1. Задача о быстродействии (задача Лагранжа):
$I\int_0^{T_H} dt = T_H - \min$ при нечетких граничных условиях $x_{1\text{Н}}$, $x_{2\text{Н}}$

2. Метод решения. В соответствии с принципом максимума имеем функцию Гамильтона

$$H(u)=\Psi_1 x_2 + \Psi_2 u - 1,$$

где Ψ_1, Ψ_2 — вспомогательные переменные. Условный максимум равен $\arg\max_{|u|\le 1} H(u) = \operatorname{sign}\Psi_2$. При $x_{1\text{Н}}(0)$, $x_{2\text{Н}}(0)$ канонические уравнения равны:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2;\, x_{1\text{Н}}(0), x_1(T) = 0 \\ \dot{x}_2 = \operatorname{sign}\Psi_2;\, x_{2\text{Н}}(0), x_2(T) \\ \dot{\Psi}_1 = -\partial H / \partial x_1 = 0 \\ \dot{\Psi}_2 = -\partial H / \partial x_2 = -\Psi_2, \end{cases}$$

откуда

$$\dot{\Psi}_1 = 0 \to \Psi_1(t) = C_1;$$
$$\dot{\Psi}_2 = -\Psi_1\Big|_{\Psi_1 = C_1} \to \Psi_2(t) = -C_1 t + C_2 \to$$
$$\to u_\text{Н}^*(t) = \operatorname{sign}\Psi_2\Big|_{\Psi_2 = C_1 t + 1} = \operatorname{sign}\left(-C_1 t + C_2\right)$$

— оптимальное управление.

Нетрудно показать, что $u_\text{Н}^*(t)$ имеет одну нечеткую точку переключения и соответственно два интервала знакопостоянства. На одном из них $u_\text{Н}^*(t) = 1_\text{Н}$, на другом $u_\text{Н}^*(t) = -1_\text{Н}$.

Замечание. Выше везде полагается, что все переменные являются нечеткими, но для упрощения обозначений индекс «Н» опущен, за исключением граничных условий. Это обусловлено тем, что одним из источников нечеткости является неопределенность, вызванная неточностью измерительной системы.

Получим нечеткие фазовые траектории. Для $u(t) = 1$ имеем

$$\dot{x}_1 = x_2,$$
$$x_2 = u\Big|_{u=1} \to x_1 = 0,5x_2^2 + a.$$

Для $u_\text{Н}^*(t) = -1_\text{Н}$ после аналогичных вычислений получим

$$x_1 = 0,5x^2 + a\,.$$

Находим «a» из нечетких граничных условий:

$$x_1\Big|_{x_1(0) = x_{1\text{Н}}} = 0,5x_2^2\Big|_{x_2(0) = x_\text{Н}} + a \to 1\cdot a = \underbrace{x_{1\text{Н}} - 0,5\left(x_{2\text{Н}}\right)^2}_{y_{1\text{Н}}}.$$

Расширенная НЛС равна:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \underline{a}(r) \\ -\overline{a}(r) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{y}_1(r) \\ -\overline{y}_1(r) \end{pmatrix},$$

откуда

$$a_{\text{Н}} = \left(\underline{a}(r) = \underline{y}_1(r);\ \overline{a}(r) = \overline{y}_1(r) \,/\, r \in [0;1]\right),$$

поэтому

$$x_{1\text{Н}} = \left(\underline{x}_1(r) = 0,5\underline{x}_2^2 + \underline{y}_1(r);\ \overline{x}_1(r) = 0,5\overline{x}_2^2 + \overline{y}_1(r) \,/\, r \in [0;1]\right).$$

Аналогично находим b и далее $x_{1\text{Н}}$:

$$x_{1\text{Н}} = \left(\underline{x}_1(r) = 0,5\underline{x}_2^2 + \underline{y}_2(r);\ \overline{x}_1(r) = 0,5\overline{x}_2 + \overline{y}_2(r) \,/\, r \in [0;1]\right).$$

Это означает, что фазовые траектории являются нечеткими параболами.

Находим нечеткое время $T_{\text{Н}} = \tau_{1\text{Н}} + \tau_{2\text{Н}}$, затрачиваемое на переход из нечеткой точки. Здесь $\tau_{1\text{Н}}$, $\tau_{2\text{Н}}$ — нечеткие времена движения соответственно при $u_{\text{Н}}^* = 1_{\text{Н}}$ и $u_{\text{Н}}^* = -1_{\text{Н}}$ (рис. 2).

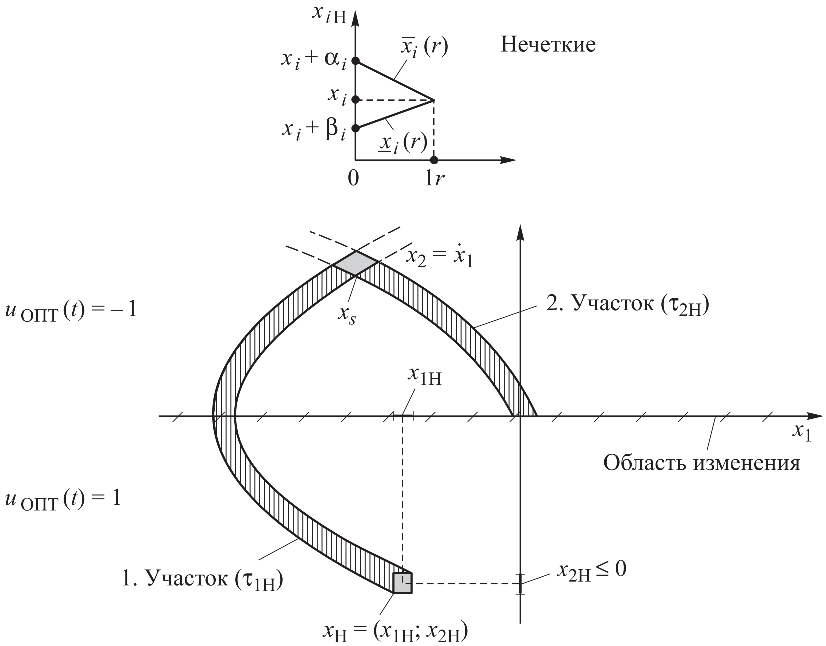

Рис. 2. Оптимальная нечеткая траектория в задаче о быстродействии

На первом участке перехода $x_{\text{Н}} \to x_s$ при $u_{\text{Н}}^* = 1_{\text{Н}}$ имеем

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = u\big|_{u=u_{\text{Н}}^*=1} \end{cases} \to x_2(t) = t + c_1 \to x_1(t) = 0,5t^2 + c_1 t + c_2.$$

Находим c_1, c_2 из граничных условий:

$$\begin{cases} x_1(t)\Big|_{x_1(t=0)=x_{1\text{Н}}} = 0,5t^2\Big|_{t=0} + c_1\cdot t\Big|_{t=0} + c_2 \\ x_2(t)\Big|_{x_2(t=0)=x_{2\text{Н}}} = t\Big|_{t=0} + c_1 \end{cases} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{1\text{Н}} \\ x_{2\text{Н}} \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\rightarrow c_1 = x_{2\text{Н}};\; c_2 = x_{1\text{Н}},$$

поэтому получаем

$$x_1(t) = 0,5t^2 + x_{2\text{Н}}t + x_{1\text{Н}};\;\; x_2(t) = t + x_{\text{Н}}.$$

Аналогично на втором участке перехода $x_s \rightarrow x_0$ при $u_{\text{Н}}^* = 1_{\text{Н}}$:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = u\Big|_{u=u_{\text{Н}}^*=1} \end{cases} \rightarrow x_2(t) = t + c_1 \rightarrow x_1(t) = 0,5t^2 + c_1 t + c_2.$$

Находим c_1, c_2 из условия, что в конечный момент времени $T_{\text{Н}} = \tau_{1\text{Н}} + \tau_{2\text{Н}}$ фазовая траектория должна попасть в начало координат (переход т. $x_{\text{Н}} \rightarrow$ т. $x_s \rightarrow$ т. x_0):

$$\begin{cases} x_1(t)\Big|_{x_1(t=T_{\text{Н}})=0} = -0,5t^2\Big|_{t=T_{\text{Н}}} + c_1\cdot t\Big|_{t=T_{\text{Н}}} + c_2 \\ x_2(t)\Big|_{x_2(t=T_{\text{Н}})=0} = -t\Big|_{t=T_{\text{Н}}} + c_1 \end{cases} \rightarrow \begin{pmatrix} T_{\text{Н}} & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,5T_{\text{Н}}^2 \\ T_{\text{Н}} \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\rightarrow c_1 = T_{\text{Н}};\; c_2 = 0,5T_{\text{Н}}^2,$$

поэтому получаем

$$x_1(t) = -0,5t^2 + T_{\text{Н}}t + T_{\text{Н}};$$
$$x_2(t) = -t + T_{\text{Н}}.$$

Находим $\tau_{1\text{Н}}$ из условия непрерывности фазовых траекторий в нечеткой точке x_s (рис. 2):

$$\begin{cases} x_{1\text{Н}}^{(1)}\left(t = \tau_{1\text{Н}}\right) = \tau_{1\text{Н}}^{(2)}\left(t = \tau_{1\text{Н}}\right), \\ x_{2\text{Н}}^{(1)}\left(t = \tau_{1\text{Н}}\right) = x_{2\text{Н}}^{(2)}\left(t = \tau_{1\text{Н}}\right), \end{cases}$$

где верхние индексы (1), (2) обозначают фазовые траектории соответственно на первом и втором участках.

В результате получаем нечеткое квадратное уравнение относительно $\tau_{1\text{Н}}$:

$$2\tau_{1\text{Н}}^2 + \left(4x_{2\text{Н}}\right)\tau_{1\text{Н}} + \left(2x_{1\text{Н}} + x_{2\text{Н}}^2\right) = 0,$$

решение которого при $\tau_{2\text{Н}} \geq 0$, $\tau_{2\text{Н}} = \tau_{1\text{Н}} + x_{2\text{Н}}$ задает:

$$\tau_{1\text{Н}} = -x_{2\text{Н}} + 0,5\left[2\left(x_{2\text{Н}}^2 + 2x_{\text{Н}}\right)\right]^{\frac{1}{2}};$$

$$\tau_{2\text{Н}} = 0,5\left[2\left(x_{2\text{Н}}^2 + 2x_{1\text{Н}}\right)\right]^{\frac{1}{2}}.$$

При этом полагается, что $x_{2\text{Н}} \le 0$ и $2x_{\text{Н}} + x_{2\text{Н}}^2 \ge 0$, откуда

$$T_{\text{Н}} = \tau_{1\text{Н}} + \tau_{2\text{Н}} = -x_{2\text{Н}} + \left[2\left(x_{2\text{Н}}^2 + 2x_{1\text{Н}}\right)\right]^{\frac{1}{2}}.$$

Из решения НЛС получим

$$T_{\text{Н}} = \left(\underline{T}\{r\} = -\underline{x}_2 + \left[2\left(\underline{x}_2^2 + 2\underline{x}_1\right)\right]^{\frac{1}{2}}; \overline{T}(r) = \overline{x}_2 + \left[2\left(\overline{x}_2^2 + 2\overline{x}_1\right)\right]^{\frac{1}{2}} / r \in [0;1]\right),$$

где $\underline{x}_i(r) = \left(x_i - \alpha_i\right) + \alpha_i r;\ \overline{x}_i(r) = \left(x_i + \beta_i\right) - \beta_i = 1,2.$

3. Частные случаи.

1. Положим для простоты расчетов (четкий вариант):

$$x_{1\text{Н}} = \left(x_1(r) = x_1(r) = 0 / r \in [0;1]\right);$$

$$x_{2\text{Н}} = \left(x_2(r) = x_2(r) = -4 / r \in [0;1]\right),$$

тогда

$$\tau_1 = 4 + 2\sqrt{2};$$

$$\tau_2 = 2\sqrt{2};$$

$$T = \tau_1 + \tau_2 = 4 + 4\sqrt{2},$$

что совпадает с результатом, полученным в [6].

2. Найдем тип нечеткого решения «сильное/слабое» относительно $T_{\text{Н}}$ в зависимости от параметров α, β. Будем, как и выше, полагать

$$x_{1\text{Н}} = 0_{\text{Н}} = \left(\underline{0}(r) = -\alpha + \alpha r;\ \overline{0}(r) = \beta - \beta r / r \in [0;1]\right);$$

$$x_{2\text{Н}} = -4_{\text{Н}} = \left(-\underline{4}(r) = (-4 - \alpha) + \alpha r;\ -\overline{4}(r) = (-4 + \beta) - \beta(r) / r \in [0;1]\right).$$

Для того чтобы $T_{\text{Н}}$ было «сильным», необходимо выполнение неравенства, которое определяет нечеткое число [2]:

$$\underline{T}(r=0) \le \overline{T}(r=0) \leftrightarrow \begin{cases} \underline{T}(r=0) \le \underline{T}(r=1) = 4 + 4\sqrt{2} \\ \overline{T}(r=0) \ge \overline{T}(r=1) = 4 + 4\sqrt{2}. \end{cases}$$

Это дает следующий результат $-7 \le \alpha \le 22{,}5$; $\beta \ge 6{,}85$; $\beta \le -22{,}3$. В противном случае будем иметь «слабое» решение относительно $T_{\text{Н}}$.

Подобным образом могут быть вычислены соответствующие решения $T_{\text{Н}}$ для других значений.

5. Выводы.

1. Сформулирована нечеткая вариационная задача о быстродействии, которая решена для частного случая успокоения материальной точки при наличии нечетких граничных условий, ограничения на управление и заданного функционала.

2. Для частного случая успокоения материальной точки построены нечеткие фазовые траектории с использованием теории решения нечетких линейных систем. Показано, что этими траекториями является семейство нечетких парабол.

3. Для параметризованных функций принадлежностей нечетких граничных условий получены диапазоны их варьирования, которые обеспечивают «слабое/сильное» решение задачи о нечетком быстродействии.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Goetschel R. Jr., Voxman W. Elementary fuzzy calculs. *Fuzzy sets and systems*, 1986, N 18, pp. 31–43.

[2] Friedman M. et al. Fuzzy linear systems. *Fuzzy sets and systems, 1998*, N 96, pp. 201–209.

[3] Деменков Н.П., Мочалов И.А. Нечеткие сплайны. *Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. «Приборостроение»*, 2012, № 2(87), с. 48–58.

[4] Асмолова Ю.Е., Мочалов И.А. Элементы нечеткого вариационного исчисления. *Вестник РУДН. Сер. «Инженерные исследования»*, 2010, № 4, с. 37–43.

[5] Бамбышева Д.А., Мочалов И.А. Нечеткое программное управление. *Вестник РУДН. Сер. «Инженерные исследования»*, 2013 (в печати).

[6] Пантелеев А.В. *Вариационное исчисление в примерах и задачах*. Москва, Высшая школа, 2006, 272 с.

[7] Афанасьев В.Н. и др. Математическая теория конструирования систем управления. Москва, Высшая школа, 2003, 614 с.

Статья поступила в редакцию 28.06.2013

Ссылку на эту статью просим оформлять следующим образом:

Мочалов И.А., Хрисат М.С. Нечеткая оптимизационная задача о быстродействии. *Инженерный журнал: наука и инновации*, 2013, вып. 10. URL: http://engjournal.ru/catalog/it/hidden/1092.html

Мочалов Иван Александрович родился в 1941 г., окончил в 1965 г. Московский энергетический институт, в 1971 г. — МГУ им. М.В. Ломоносова. Д-р техн. наук, профессор кафедры «Системы автоматического управления» МГТУ им. Н.Э. Баумана. Автор более 100 научных работ в области теории и практики оптимизации и идентификации систем автоматического управления.

Хрисат Мохммад Слеман родился в 1981 г., окончил в 2007 г. Нью-Йоркский технологический институт, получив степень магистра, с 2007 г. преподает в университете Аль-Балка, с 2012 г. — аспирант Российского университета дружбы народов.
e-mail: mohd.khrisat@fet.edu.jo