УДК 53.082

Разработка алгоритмического и программного обеспечения рекуррентных многомерного и параметрического методов «быстрого» моделирования динамических систем

© Н.А. Малахов, И.Р. Танташев

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, 105005, Россия

Для ускорения и упрощения процесса моделирования динамических систем разработано и протестировано алгоритмическое и программное обеспечение многомерного и параметрического методов реализации их дискретных цифровых моделей. Полученные результаты применимы к моделированию линейных стационарных и нестационарных, а также нелинейных динамических систем.

Ключевые слова: *цифровое моделирование, дискретные цифровые системы, фундаментальные системы решений дифференциальных уравнений, формула Коши, аналитико-числовые компьютерные технологии.*

Автоматизация управления в современных машиностроительных и технологических агрегатах, а также приборостроительных и специальных системах сопряжена с необходимостью компьютерной переработки информации в реальном времени. Причиной является необходимость создания цифровых встраиваемых блоков, которые функционируют в совокупности с техническими устройствами системы, получая и выдавая реальные физические сигналы. По существу, эти блоки служат неотъемлемыми частями системы и могут рассматриваться как ее особые конструктивные элементы.

При разработке таких устройств мы сталкиваемся с необходимостью развития нового конструкторского и технологического поля, которое должно включать и прикладную научную деятельность. В перспективе сюда же должны войти и фундаментальные научные исследования. Современным инструментом и базой таких работ служат не только известные языки программирования C, Java и другие универсальные языки «высокого» уровня, но и сравнительно недавно разработанные символьные математические языки, или, как их часто называют, системы компьютерной алгебры (математики) [1]. Их можно считать основой так называемых аналитико-числовых компьютерных технологий (АЧКТ). В отличие от универсальных языков высокого уровня, которые исторически послужили базой для создания технологий компьютерной автоматизации арифметики, системы АЧКТ являются инструментом для компьютерной автоматизации символьных (формульных) математических преобразований. Подобные работы традиционно считались предметом только научных исследований, однако практика показывает, что в настоящее время без использования таких средств не могут проводиться качественные и глубокие инженерные работы. Это со всей очевидностью проясняется на примерах задач управления, а конкретнее, в задачах создания цифровых моделей для встраиваемых динамических блоков.

Исторически сложилось так, что многие функциональные преобразования оказываются понятными и даже наглядными как завершенные решения, если представляются в виде решений дифференциальных уравнений или иных эквивалентных моделей. Заставить ЭЦВМ провести все необходимые аналитические выкладки в реальном времени и встроить такой блок в функционирующую систему в настоящее время невозможно. Поэтому для машины приходится упрощать работу, но без потери необходимого качества.

На рис. 1 упрощенно показана структура процесса построения дискретной модели.

Рис. 1. Структурная схема построения дискретной модели

Фактически путь решения проблемы заключается в использовании динамических преобразований (физических аналогов, формирующих передаточные функции или дифференциальные уравнения). И далее идет формирование цифровых моделей, адекватных эталонным непрерывным аналогам.

Широкое распространение в настоящее время получило использование известной формулы свертки для реализации цифрового аналога путем «взвешивания» прошлых значений внешних воздействий. Подход апробирован и вполне применим и укоренился при реализации сравнительно простых динамических преобразований (цифровые фильтры нижних или верхних частот невысокого порядка). Однако здесь имеют место весьма существенные методические и вычислительные ошибки.

Ранее был предложен альтернативный подход [2] — так называемое многомерное моделирование (М-модели, М-моделирование или М-фильтрация). Здесь вместо формулы свертки, когда аналоговый прототип можно назвать одномерной системой, используется формула Коши, которая оперирует многомерным объектом — системой уравнений состояния.

Формула Коши позволяет организовать процесс моделирования рекуррентно: на каждой итерации (реализации внешнего воздействия) и итерационно вычисляемом начальном состоянии позволяет определить новое начальное состояние. Таким образом, формируется непрерывный итерационный процесс, обладающий рядом уникальных свойств: результат моделирования инвариантен длине временного шага итерации, отпадает необходимость огрублять аппроксимацию импульсной переходной функции или переходной матрицы. Здесь вводятся понятия М-характеристик: будем так называть матрицу, вектор-столбец и вектор-строку дискретной многомерной модели динамической системы. Эти объекты и обеспечивают формирование рекуррентного процесса моделирования.

Однако формула Коши применима только для линейных (стационарных и нестационарных) систем, причем в нестационарном случае М-характеристики не выражаются в элементарных функциях, что существенно усложняет задачу. Поэтому метод М-моделирования был развит применительно к стационарным линейным системам. Разработаны способы и алгоритмы преобразования скалярных и векторных уравнений в систему уравнений состояния, используя форму Фробениуса для матрицы состояния и предложенную одним из авторов альтернативную форму на базе широко известного в теории управления понятия типовых звеньев. Если в первом случае переменными состояния является фазовый вектор выходной переменной, то во втором — собственные движения типовых инерционных звеньев. Первый вариант дает наглядное представление о векторе состояния (выходная переменная и ее производные), второй — сопряжен с менее наглядной формой переменных состояния, зато ведет к более простой структуре матрицы системы уравнений (квазидиагональной). Это значительно упрощает построение фундаментальной матрицы, а затем и определение всех М-характеристик дискретной цифровой модели.

Недостаток изложенного метода М-моделирования заключается в трудностях его применения к нелинейным и нестационарным системам. Приходится использовать кусочно-линейную аппроксимацию для нелинейностей и кусочно-постоянную — для функций времени. Эти сложности и подтолкнули к следующей модификации М-метода — так называемому методу многомерного параметрического моделирования (МП-моделирования).

Суть состоит в следующем: сделать М-характеристики параметрическими, чтобы учесть зависимость их от времени (нестационарность) и от состояния (нелинейность), причем так, чтобы время и состояние входили в соответствующие матрицы явно и позволяли путем подстановки нужного числового значения своевременно подстроить матрицы дискретной модели. Известные математические и ресурсные ограничения не позволяют распространить подход на системы произвольного порядка, однако свойства динамических систем, допускающие структурную декомпозицию «большой» системы на более «мелкие», менее связные, обеспечивают разрешимость задачи.

В настоящей работе предложено предварительно формировать характеристики цифровой М-модели в виде параметрических (аналитических) выражений, которые, используя структурные разложения сложного аналога, могут быть помещены в память ЭВМ. Рассмотренный подход и есть МП-моделирование. Для его реализации важен выбор минимальных и достаточных структурных единиц, для которых будут создаваться параметрические М-характеристики.

В силу распространенности, физической и методической наглядности такой структурной единицы, как типовое звено, было бы целесообразно сохранить аналогичный подход и к структурированию динамических систем при дискретном моделировании. Однако среди типовых звеньев имеется ряд физически нереализуемых, для которых нецелесообразно строить МП-характеристики, но для полноты картины они должны войти в число базовых структур. Для этого в состав базовых структур следует включить все инерционные звенья: интегрирующее, апериодическое, двукратное апериодическое — с двукратным полюсом, колебательное, а также объединенное их сочетание с физически нереализуемыми звеньями. Таким образом, в список базовых структур войдут блоки дробно рационального типа передаточных функций не выше второго порядка включительно, которые мы называем вычислительно реализуемыми, т. е. допускается равенство порядков числителя и знаменателя передаточной функции.

Для базовых блоков были сформированы МП-характеристики. Каждый из них при моделировании образует рекуррентный процесс, имеющий свой входной и выходной сигналы, с их помощью блоки объединяются между собой. Причем объединение этих структурных единиц в передаточную функцию системы высокого порядка может проводиться последовательно, параллельно или иным способом.

Далее, реализация вычислительного процесса может осуществляться либо с использованием матриц высокого порядка, соответствующих максимальному порядку моделируемой системы, либо пошагово, с матрицами меньшей размерности, что эквивалентно прохождению сигнала через цепочку последовательно соединенных звеньев, образующих в совокупности передаточную функцию нужной сложной системы.

Для каждой типовой структурной единицы необходимо заранее заготовить ее дискретные характеристики (М-характеристики) в параметрическом виде, т. е. в функции ограниченного числа переменных. Практика показывает, что характер вхождения параметров звеньев в МП-характеристики весьма сложен, однако он всегда может быть выражен в элементарных функциях. Небольшое количество параметров типовых и присоединенных звеньев делают указанную задачу выполнимой, а итоговые формулы — сравнительно несложными и обозримыми.

В итоге, для аналоговых прототипов (слева) получаются рекуррентные процессы (справа):

$$\frac{d\overline{x}(t)}{dt} = f\left(\overline{x}(t), \overline{u(t)}\right) \Rightarrow \overline{x}\left[k+1\right] = f\left(\overline{x}\left[k\right], \overline{u}\left[k\right]\right),$$

$$\frac{d\overline{x}(t)}{dt} = A(t)\overline{x}(t) + B(t)\overline{u}(t) \Rightarrow \overline{x}\left[k+1\right] = A\left[k\right]\overline{x}\left[k\right] + B\left[k\right]\overline{u}\left[k\right],$$

$$\frac{d\overline{x}}{dt} = A\overline{x}(t) + B\overline{u}(t) \Rightarrow \overline{x}\left[k+1\right] = A\overline{x}\left[k\right] + B\overline{u}\left[k\right].$$

В качестве примера приведем параметрические выражения для матриц дискретной модели колебательного звена. Для упрощения формул далее пришлось ввести другие параметры — r и w_0 — для действительной и мнимой частей полюса, вместо общепринятых.

Параметры цифровой модели: *Ad_p* — переходная матрица и *Bd_p* — матрица входа, *dd* — длина шага дискретности по времени,

$$Ad\_p := \begin{bmatrix} \dfrac{(-r\sin(w0\ dd) + w0\ \cos(w0\ dd))\,\mathbf{e}^{(r\,dd)}}{w0} & \dfrac{\sin(w0\ dd)\,\mathbf{e}^{(r\,dd)}}{w0} \\ \dfrac{(-r^2\sin(w0\ dd) - w0^2\sin(w0\ dd))\,\mathbf{e}^{(r\,dd)}}{w0} & \dfrac{(r\sin(w0\ dd) + w0\ \cos(w0\ dd))}{w0} \end{bmatrix}$$

$$Bd\_p := \begin{bmatrix} \dfrac{K\,(-w0\ \cos(w0\ dd)\,\mathbf{e}^{(r\,dd)} + r\sin(w0\ dd)\,\mathbf{e}^{(r\,dd)} + w0)}{w0} \\ \dfrac{K\sin(w0\ dd)\,\mathbf{e}^{(r\,dd)}\,(r^2 + w0^2)}{w0} \end{bmatrix}$$

Программа рекуррентного МП-моделирования, реализованная на языке C#:

```
    double u = -eps / T;
    double v = Math.Sqrt(1 — eps * eps) / T;

    Matrix Af = new Matrix(2, 2);

    Af[0, 0] = (Math.Cos(v * d) * v — u * Math.Sin(v * d)) *
Math.Exp(u * d) / v;
    Af[0, 1] = Math.Sin(v * d) * Math.Exp(u * d) / v;
    Af[1, 0] = -Math.Sin(v * d) * (u * u + v * v) *
Math.Exp(u * d) / v;
    Af[1, 1] = (u * Math.Sin(v * d) + v * Maeeth.Cos(v * d))
* Math.Exp(u * d) / v;

    Matrix Bf = new Matrix(2, 1);

    Bf[0, 0] = -Math.Exp(u * d) * K * Math.Cos(v * d) + K +
Math.Exp(u * d) * K * u * Math.Sin(v * d) / v;
    Bf[1, 0] = Math.Exp(u * d) * Math.Sin(v * d) * K * u * u
/ v + Math.Exp(u * d) * K * Math.Sin(v * d) * v;

    Matrix Cf = new Matrix(1, 2);

    Cf[0, 0] = 1;
    Cf[0, 1] = 0;

    Matrix X = new Matrix(2, 1);

    X[0, 0] = 0;
    X[1, 0] = 0;

    List<Matrix> Y_list = new List<Matrix>();

    for (int i = 0; i < N; i++)
    {
    Y_list.Add(Cf * X);
    X = Af * X + Bf;
    }
```

На рис. 2 приведен график результатов МП-моделирования колебательного звена по приведенной программе.

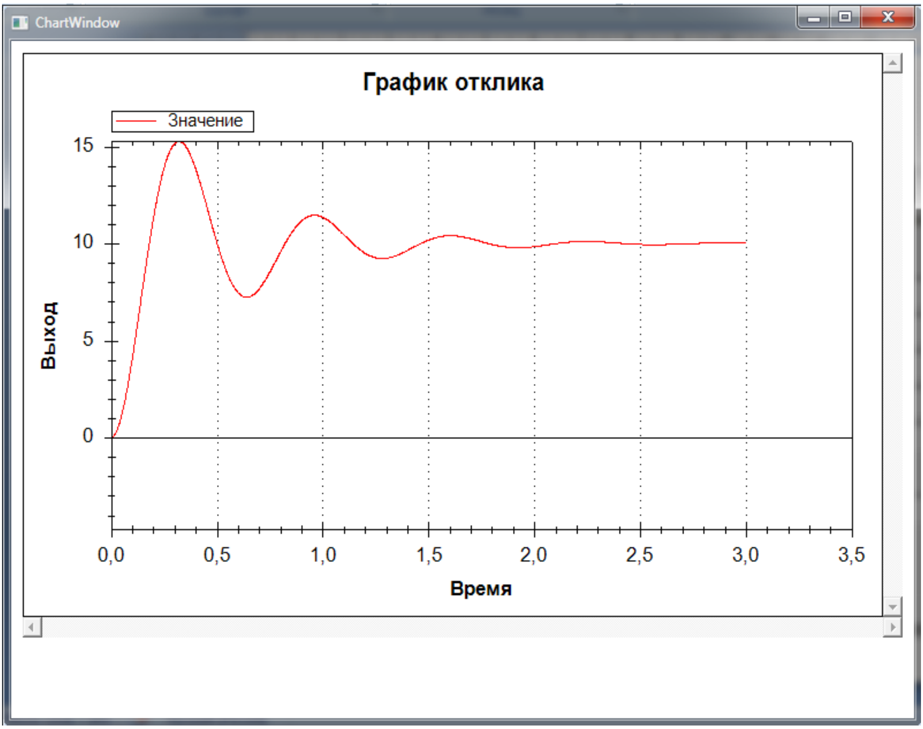

Рис. 2. Результаты моделирования — отклик на единичный скачок

Заключение. Разработаны алгоритмы и программы для формирования МП-характеристик базовых динамических структур, поддерживающих рекуррентное цифровое моделирование динамических систем широкого класса. Использование результатов работы позволяет изменять текущим образом параметры моделируемых уравнений, не меняя самого алгоритма и программы. Тестовые испытания программного обеспечения подтвердили существенное ускорение процесса и обеспечение высокой точности результатов. Так, один шаг моделирования колебательного звена выполняется за 5,2 мкс.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Дьяконов В.П. *Maple 10/11/12/13/14 в математических расчетах*. Москва, ДМК Пресс, 2011, 800 с.

[2] Малахов Н.А. Синтез систем стабилизации для объектов с распределенными параметрами на основе аналитико-числового метода собственных функций. *Отчет по НИР «Интеллектуальные системы». МГТУ*. Рук. К.А. Пупков. № ИУ1-2/95. № ГР. 01.97.0003063. Москва, 1995.

Статья поступила в редакцию 28.06.2013

Ссылку на эту статью просим оформлять следующим образом:
Малахов Н.А., Танташев И.Р. Разработка алгоритмического и программного обеспечения рекуррентных многомерного и параметрического методов «быстрого» моделирования динамических систем. *Инженерный журнал: наука и инновации*, 2013, вып. 10. URL: http://engjournal.ru/catalog/it/hidden/1087.html

Малахов Николай Александрович — канд. техн. наук, доцент кафедры «Системы автоматического управления» МГТУ им. Н.Э. Баумана. e-mail: malna@bmstu.ru

Танташев Илдар Ринатович — аспирант кафедры «Системы автоматического управления» МГТУ им. Н.Э. Баумана.