УДК 517.977

Явные формулы синтеза регулятора и наблюдателя для дескрипторной системы

© Н.Е. Зубов[1,2], Е.Ю. Зыбин[1], М.Ш. Мисриханов[1], В.Н. Рябченко[1]

[1] ОАО «Ракетно-космическая корпорация ”Энергия“ имени С.П. Королёва», г. Королев Московской области, 141070, Россия
[2] МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, 105005, Россия

На основе ленточных матриц управляемости и наблюдаемости линейной алгебро-дифференциальной системы с одним входом и одним выходом получены явные формулы синтеза регулятора и наблюдателя состояния, обеспечивающие заданные коэффициенты характеристического полинома замкнутой системе. Приводимые формулы синтеза играют для алгебро-дифференциальных систем такую же роль, какую играют формулы синтеза Аккерманна и Басса — Гура для линейных систем стандартного вида.

Ключевые слова: *дескрипторная система, управляемость, наблюдаемость, ленточные матрицы, регулятор, наблюдатель, явная формула.*

Введение. Рассмотрим в пространстве состояний линейную динамическую систему с одним входом и одним выходом

$$\boldsymbol{E}\dot{\mathbf{x}} = \boldsymbol{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}u, \qquad y = \mathbf{c}^{\mathrm{T}}\mathbf{x}, \tag{1}$$

где $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ — вектор состояния; $u \in \mathbb{R}^1$ — скалярный вход; $y \in \mathbb{R}^1$ — скалярный выход; $\mathbb{R}^1 = \mathbb{R}$ — множество вещественных чисел (вещественная ось); $\mathbb{R}^n$ — n-мерное вещественное пространство. Матрицы E и A считаются произвольными и квадратными.

Уравнения (1) можно рассматривать как описание линейной динамической системы, не разрешенные относительно производных. Такие системы принято называть *алгебро-дифференциальными* [1] или *дескрипторными*.

Функция от переменной $\lambda \in \mathbb{C}$ вида

$$\boldsymbol{G}(\lambda) = \mathbf{c}^{\mathrm{T}}\left(\lambda\boldsymbol{E} - \boldsymbol{A}\right)^{-1}\mathbf{b} = \frac{\theta_l\lambda^l + \theta_{l-1}\lambda^{l-1} + \cdots + \theta_1\lambda + \theta_0}{\gamma_k\lambda^k + \gamma_{k-1}\lambda^{k-1} + \cdots + \gamma_1\lambda + \gamma_0}, \; l \le k \le n, \tag{2}$$

называется передаточной функцией дескрипторной системы (ДС) (1). Здесь $\mathbb{C}$ — множество комплексных чисел.

Если выполняется неравенство

$$\det \boldsymbol{E} \ne 0, \tag{3}$$

тогда ДС (1) может быть приведена к виду

$$\dot{\mathbf{x}} = \boldsymbol{E}^{-1}\boldsymbol{A}\mathbf{x} + \boldsymbol{E}^{-1}\mathbf{b}u, \qquad y = \mathbf{c}^{\mathrm{T}}\mathbf{x} \tag{4}$$

или

$$\dot{\mathbf{x}} = \tilde{\boldsymbol{A}}\mathbf{x} + \tilde{\mathbf{b}}u, \qquad y = \mathbf{c}^{\mathrm{T}}\mathbf{x}\,. \tag{5}$$

Если же число обусловленности матрицы E

$$\mathrm{cond}\,\boldsymbol{E} = \frac{\sigma_{\max}(\boldsymbol{E})}{\sigma_{\min}(\boldsymbol{E})} >> 1$$

(здесь $\sigma_{\max}(\boldsymbol{E})$ и $\sigma_{\min}(\boldsymbol{E})$ — соответственно максимальное и минимальное сингулярные числа матрицы), то практическое использование уравнения (4) в задачах анализа и синтеза сопровождается большими ошибками. Еще более ухудшает ситуацию высокая размерность вектора состояния $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ [2] (например, это характерно при математическом описании больших электроэнергетических систем, когда $n > 10^2 \ldots 10^3$ [3]).

При вырожденности матрицы E ее определитель равен нулю:

$$\det\, \boldsymbol{E} = 0\,, \tag{6}$$

и, следовательно, преобразование ДС к виду (4) даже теоретически невозможно. Таким образом, возникает ситуация, когда при решении той или иной задачи анализа или синтеза предпочтительнее использовать исходную форму записи ДС (1).

Многие физические процессы описываются моделями с условием (6). Такие системы обычно получаются в результате идеализации разнотемповых физических систем (динамических систем, одновременно имеющих «существенно быстрые» и «существенно медленные» моды колебаний).

В данной работе предложена явная формула синтеза закона управления с обратной связью (регулятора)

$$u = -\mathbf{k}^{\mathrm{T}}\mathbf{x} \tag{7}$$

и наблюдателя состояния с законом инъекции входа

$$\mathbf{v} = -\mathbf{l}y\,, \tag{8}$$

позволяющие по известным параметрам ДС (1), ее характеристическому полиному и заданным расположениям полюсов, также выраженным в коэффициентах характеристических полиномов, рассчитать регулятор и наблюдатель состояния, обеспечивающие замкнутой системе требуемое расположение полюсов. Основным формальным объектом исследований являются ленточные матрицы управляемости и наблюдаемости ДС.

Ленточная матрица управляемости ДС и ее основные свойства. Введем определение.

Определение 1. [4]. *Матрицу*

$$\boldsymbol{I}_n \otimes \left(\begin{array}{c} -\mathbf{b}_L^{\perp} \boldsymbol{A} \\ \hdashline \mathbf{b}_L^{\perp} \boldsymbol{E} \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c:c:c:c:c} -\mathbf{b}_L^{\perp} \boldsymbol{A} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \hdashline \mathbf{b}_L^{\perp} \boldsymbol{E} & -\mathbf{b}_L^{\perp} \boldsymbol{A} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \hdashline \mathbf{0} & \mathbf{b}_L^{\perp} \boldsymbol{E} & -\mathbf{b}_L^{\perp} \boldsymbol{A} & \cdots & \mathbf{0} \\ \hdashline \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{b}_L^{\perp} \boldsymbol{E} & \ddots & \vdots \\ \hdashline \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & -\mathbf{b}_L^{\perp} \boldsymbol{A} \\ \hdashline \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{b}_L^{\perp} \boldsymbol{E} \end{array} \right) \in \mathbb{R}^{n^2 \times (n^2+1)} \tag{9}$$

будем называть ленточной матрицей управляемости ДС (1).

Здесь и далее $\mathbf{0}$ — нулевая матрица подходящего размера, $\otimes$ — символ операции кронекерова произведения, символом $(\cdot)_L^{\perp}$ обозначен левый делитель нуля максимального ранга заданной матрицы (вектора), а символом $(\cdot)_R^{\perp}$ — правый делитель нуля максимального ранга заданной матрицы (вектора).

В соответствии с [5] левым делителем нуля максимального ранга некоторой матрицы $\boldsymbol{M} \in \mathbb{R}^{n \times m}$ ранга r называется матрица $\boldsymbol{M}_L^{\perp}$, если одновременно выполняются условия

$$\boldsymbol{M}_L^{\perp} \boldsymbol{M} = \mathbf{0}_{(n-r)\times m}, \ \operatorname{rank} \boldsymbol{M}_L^{\perp} = n - r .$$

Правым делителем нуля максимального ранга матрицы $\boldsymbol{M} \in \mathbb{R}^{n \times m}$ ранга r называется матрица $\boldsymbol{M}_R^{\perp}$, если одновременно выполняются следующие условия:

$$\boldsymbol{M} \boldsymbol{M}_R^{\perp} = \mathbf{0}_{n\times(m-r)}, \ \operatorname{rank} \boldsymbol{M}_R^{\perp} = m - r .$$

Без ограничения общности в дальнейшем будем полагать, что матрицы $\boldsymbol{M}_L^{\perp}$ и $\boldsymbol{M}_R^{\perp}$ удовлетворяют условиям ортогональности, т. е.

$$\boldsymbol{M}_L^{\perp} \boldsymbol{M}_L^{\perp\mathrm{T}} = \boldsymbol{I}_{n-r}, \qquad \boldsymbol{M}_R^{\perp\mathrm{T}} \boldsymbol{M}_R^{\perp} = \boldsymbol{I}_{n-m} .$$

Здесь I_{n-r}, I_{n-m} — единичные матрицы размеров $n - r$ и $n - m$, соответственно.

Справедлива теорема.

Теорема 1. [6]. *Для полной управляемости ДС* (1) *необходимо и достаточно, чтобы*

$$\left(\boldsymbol{I}_n \otimes \begin{pmatrix} -\mathbf{b}_L^{\perp}\boldsymbol{A} \\ \hdashline \mathbf{b}_L^{\perp}\boldsymbol{E} \end{pmatrix}\right)_R^{\perp} = \begin{pmatrix} \Upsilon_1 \\ \hdashline \Upsilon_2 \\ \hdashline \vdots \\ \hdashline \Upsilon_{n-1} \\ \hdashline \Upsilon_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n^2}, \ \Upsilon_i \in \mathbb{R}^n \ . \tag{10}$$

Пусть далее

$$\det\left(\lambda\boldsymbol{E} - \boldsymbol{A}\right) = \gamma_k\lambda^k + \gamma_{k-1}\lambda^{k-1} + \cdots + \gamma_1\lambda + \gamma_0, \quad k \le n \tag{11}$$

— характеристический полином (далее х.п.) ДС (1). Известно [1], что корни полинома (11) определяют полюсы передаточной функции ДС (2) и, следовательно, устойчивость этой системы.

Справедливо утверждение.

Теорема 2. [6]. *Коэффициенты х.п.* (1) *полностью управляемой ДС* (1) *определяются ленточной формулой*

$$\begin{pmatrix} \gamma_0 \\ \hdashline \gamma_1 \\ \hdashline \vdots \\ \hdashline \gamma_{k-1} \\ \hdashline \gamma_k \end{pmatrix} = \left(\boldsymbol{I}_k \otimes \begin{pmatrix} -\mathbf{b}^{+}\boldsymbol{A} \\ \hdashline \mathbf{b}^{+}\boldsymbol{E} \end{pmatrix}\right) \begin{pmatrix} \Upsilon_1 \\ \hdashline \Upsilon_2 \\ \hdashline \vdots \\ \hdashline \Upsilon_{k-1} \\ \hdashline \Upsilon_k \end{pmatrix}, \tag{12}$$

где Υ_i *— субвекторы из* (10),

$$\mathbf{b}^{+} = \left(\mathbf{b}^{\mathrm{T}}\mathbf{b}\right)^{-1}\mathbf{b}^{\mathrm{T}}.$$

Известно также, что корни полинома числителя передаточной функции ДС (2)

$$\theta_l\lambda^l + \theta_{l-1}\lambda^{l-1} + \cdots + \theta_1\lambda + \theta_0 \tag{13}$$

определяют нули передачи ДС (1), т. е. комплексные частоты входных воздействий, при которых обнуляется ее выход.

Теорема 3. [6]. *Коэффициенты полинома числителя* (13) *передаточной функции* (2) *полностью управляемой ДС* (1) *определяются ленточной формулой*

$$\left(\begin{array}{c}\theta_0\\ \hdashline \vdots \\ \hdashline \theta_{l-1}\\ \hdashline \theta_l\end{array}\right) = -\left(\boldsymbol{I}_l \otimes \mathbf{c}^{\mathrm{T}}\right)\left(\begin{array}{c}\Upsilon_1\\ \hdashline \Upsilon_2\\ \hdashline \vdots \\ \hdashline \Upsilon_{k-1}\\ \hdashline \Upsilon_k\end{array}\right), \tag{14}$$

где Υ_i *— субвекторы из* (10).

Явная формула синтеза регулятора ДС по заданным коэффициентам х.п. Одними из наиболее известных явных расчетных формул, применяемых для модального синтеза регуляторов стандартных линейных SISO-систем, являются формулы Аккермана и Басса — Гура [7 – 9]. Основным достоинством этих формул является их явный вид, что позволяет по известным параметрам системы, ее характеристическому полиному и заданному расположению полюсов, также выраженному в коэффициентах характеристического полинома, рассчитать обратную связь, обеспечивающую замкнутой системе требуемое расположение полюсов. Аналогичных формул для ДС (1) на настоящий момент времени авторам не известно. Однако использование свойств ленточной матрицы управляемости ДС (9) позволяет получить подобные формулы.

Пусть ДС (1) полностью управляемая и замкнута обратной связью (7), тогда можно записать ленточную матрицу (9) с учетом этого управления*:

$$\boldsymbol{I}_k \otimes \left(\begin{array}{c}-\mathbf{b}_L^{\perp}\left(\boldsymbol{A}-\mathbf{b}\mathbf{k}^{\mathrm{T}}\right)\\ \hdashline \mathbf{b}_L^{\perp}\boldsymbol{E}\end{array}\right). \tag{15}$$

Однако, в силу равенств

$$\mathbf{b}_L^{\perp}\left(\boldsymbol{A}-\mathbf{b}\mathbf{k}^{\mathrm{T}}\right) = \mathbf{b}_L^{\perp}\boldsymbol{A} - \underbrace{\mathbf{b}_L^{\perp}\mathbf{b}}_{0}\,\mathbf{k}^{\mathrm{T}} = \mathbf{b}_L^{\perp}\boldsymbol{A},$$

матрица (15) равна матрице (9) и, значит, вводимое управление не оказывает никакого влияния на правый делитель ленточной матрицы (10)

Пусть далее порядок дифференциальных уравнений в (1) равен k, тогда х.п. (1) определяется формулой (12). При замыкании обратной связью (7) формула (12) изменяется следующим образом:

* Для упрощения записи здесь и далее указание на размеры матриц опущено.

$$\begin{pmatrix} \widehat{\gamma}_0 \\ \hdashline \widehat{\gamma}_1 \\ \hdashline \vdots \\ \hdashline \widehat{\gamma}_{k-1} \\ \hdashline \widehat{\gamma}_k \end{pmatrix} = \left(\boldsymbol{I}_k \otimes \begin{pmatrix} -\mathbf{b}^{+}\left(\boldsymbol{A} - \mathbf{b}\mathbf{k}^{\mathrm{T}}\right) \\ \hdashline \mathbf{b}^{+}\boldsymbol{E} \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} \Upsilon_1 \\ \hdashline \Upsilon_2 \\ \hdashline \vdots \\ \hdashline \Upsilon_{k-1} \\ \hdashline \Upsilon_k \end{pmatrix}$$

или в силу равенства $\mathbf{b}^{+}\mathbf{b}\mathbf{k}^{\mathrm{T}} = \mathbf{k}^{\mathrm{T}}$

$$\begin{pmatrix} \widehat{\gamma}_0 \\ \hdashline \widehat{\gamma}_1 \\ \hdashline \vdots \\ \hdashline \widehat{\gamma}_{k-1} \\ \hdashline \widehat{\gamma}_k \end{pmatrix} = \left(\boldsymbol{I}_k \otimes \begin{pmatrix} -\mathbf{b}^{+}\boldsymbol{A} \\ \hdashline \mathbf{b}^{+}\boldsymbol{E} \end{pmatrix} + \boldsymbol{I}_k \otimes \mathbf{k}^{\mathrm{T}} \right) \begin{pmatrix} \Upsilon_1 \\ \hdashline \Upsilon_2 \\ \hdashline \vdots \\ \hdashline \Upsilon_{k-1} \\ \hdashline \Upsilon_k \end{pmatrix}. \qquad (16)$$

Здесь $\widehat{\gamma}_i,\ i = \overline{0,\ k}$ — коэффициенты х.п. замкнутой ДС

$$\det\left(\lambda\boldsymbol{E} - \boldsymbol{A} + \mathbf{b}\mathbf{k}^{\mathrm{T}}\right) = \widehat{\gamma}_k\lambda^k + \widehat{\gamma}_{k-1}\lambda^{k-1} + \cdots + \widehat{\gamma}_1\lambda + \widehat{\gamma}_0, \quad k \le n. \qquad (17)$$

Используя (12), перепишем (16) в новом виде:

$$\begin{pmatrix} \widehat{\gamma}_0 \\ \hdashline \widehat{\gamma}_1 \\ \hdashline \vdots \\ \hdashline \widehat{\gamma}_{k-1} \\ \hdashline \widehat{\gamma}_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma_0 \\ \hdashline \gamma_1 \\ \hdashline \vdots \\ \hdashline \gamma_{k-1} \\ \hdashline \gamma_k \end{pmatrix} + \boldsymbol{I}_k \otimes \mathbf{k}^{\mathrm{T}} \begin{pmatrix} \Upsilon_1 \\ \hdashline \Upsilon_2 \\ \hdashline \vdots \\ \hdashline \Upsilon_{k-1} \\ \hdashline \Upsilon_k \end{pmatrix}. \qquad (18)$$

Преобразуя далее (18), получим *ленточную формулу*

$$\boldsymbol{I}_k \otimes \mathbf{k}^{\mathrm{T}} \begin{pmatrix} \Upsilon_1 \\ \hdashline \Upsilon_2 \\ \hdashline \vdots \\ \hdashline \Upsilon_{k-1} \\ \hdashline \Upsilon_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \widehat{\gamma}_0 - \gamma_0 \\ \hdashline \widehat{\gamma}_1 - \gamma_1 \\ \hdashline \vdots \\ \hdashline \widehat{\gamma}_{k-1} - \gamma_{k-1} \\ \hdashline \widehat{\gamma}_k - \gamma_k \end{pmatrix}, \qquad (19)$$

связывающую матрицу регулятора из закона управления (7) и вектор разности коэффициентов заданного х.п. (17) и исходного х.п. (11).

Ленточная формула (19) может быть переписана в виде эквивалентных уравнений

$$\mathbf{k}^{\mathrm{T}}\left(\Upsilon_1 \mid \Upsilon_2 \mid \cdots \mid \Upsilon_{k-1} \mid \Upsilon_k\right)=\left(\Delta\gamma_0 \mid \Delta\gamma_1 \mid \cdots \mid \Delta\gamma_{k-1} \mid \Delta\gamma_k\right), \quad (20)$$

$$\begin{pmatrix} \Upsilon_1^{\mathrm{T}} \\ \hdashline \Upsilon_2^{\mathrm{T}} \\ \hdashline \vdots \\ \hdashline \Upsilon_{k-1}^{\mathrm{T}} \\ \hdashline \Upsilon_k^{\mathrm{T}} \end{pmatrix} \mathbf{k} = \begin{pmatrix} \Delta\gamma_0 \\ \hdashline \Delta\gamma_1 \\ \hdashline \vdots \\ \hdashline \Delta\gamma_{k-1} \\ \hdashline \Delta\gamma_k \end{pmatrix}, \quad (21)$$

где

$$\Delta\gamma_i = \widehat{\gamma}_i - \gamma_i, \quad i=\overline{0,\ k}.$$

При условии обратимости матрицы

$$\left(\Upsilon_1 \mid \Upsilon_2 \mid \cdots \mid \Upsilon_{k-1} \mid \Upsilon_{k-2}\right) = \begin{pmatrix} \Upsilon_1^{\mathrm{T}} \\ \hdashline \Upsilon_2^{\mathrm{T}} \\ \hdashline \vdots \\ \hdashline \Upsilon_{k-1}^{\mathrm{T}} \\ \hdashline \Upsilon_k^{\mathrm{T}} \end{pmatrix}^{\mathrm{T}} \quad (22)$$

из (20) получаем окончательные формулы регулятора ДС (1), обеспечивающего заданное расположение полюсов в форме коэффициентов х.п. (17), а именно,

$$\mathbf{k}^{\mathrm{T}} = \left(\Delta\gamma_0 \mid \Delta\gamma_1 \mid \cdots \mid \Delta\gamma_{k-1} \mid \Delta\gamma_k\right)\left(\Upsilon_1 \mid \Upsilon_2 \mid \cdots \mid \Upsilon_{k-1} \mid \Upsilon_k\right)^{-1} \quad (23)$$

$$\mathbf{k} = \begin{pmatrix} \Upsilon_1^{\mathrm{T}} \\ \hdashline \Upsilon_2^{\mathrm{T}} \\ \hdashline \vdots \\ \hdashline \Upsilon_{k-1}^{\mathrm{T}} \\ \hdashline \Upsilon_k^{\mathrm{T}} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \Delta\gamma_0 \\ \hdashline \Delta\gamma_1 \\ \hdashline \vdots \\ \hdashline \Delta\gamma_{k-1} \\ \hdashline \Delta\gamma_k \end{pmatrix}. \quad (24)$$

По аналогии с [10] можно показать, что для полностью управляемой ДС (1) матрица (22) всегда обратима.

Таким образом, нами доказана теорема.

Теорема 4. *Пусть линейная ДС* (1) *полностью управляемая и имеет х.п.* (11). *Тогда матрица* k^{T} *в законе обратной связи* (7)*, обеспечивающая замкнутой системе х.п.* (17), *определяется эквивалентными формулами* (23), (24).

Итак, формула (23) играет при синтезе регулятора ДС такую же роль, какую играют формулы Аккерманна и Басса — Гура при синтезе регулятора для линейных систем стандартного вида (5).

Ленточная матрица наблюдаемости ДС и явная формула синтеза наблюдателя состояния. В силу дуальности задач анализа полной управляемости и наблюдаемости линейной ДС (1), справедлива теорема, дуальная теореме 1.

Теорема 5. [6]. *Для полной наблюдаемости ДС*(1) *необходимо и достаточно, чтобы*

$$\left(\boldsymbol{I}_n \otimes \begin{pmatrix} -\mathbf{c}_R^{\perp\mathrm{T}} \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} \\ \hdashline \mathbf{c}_R^{\perp\mathrm{T}} \boldsymbol{E}^{\mathrm{T}} \end{pmatrix}\right)_R^{\perp} \in \mathbb{R}^{n^2}, \tag{25}$$

где $\mathbf{c}_R^{\perp}$ *— ортогональный правый делитель нуля вектора* $\mathbf{c}^{\mathrm{T}}$.

Матрица

$$\boldsymbol{I}_n \otimes \begin{pmatrix} -\mathbf{c}_R^{\perp\mathrm{T}} \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} \\ \hdashline \mathbf{c}_R^{\perp\mathrm{T}} \boldsymbol{E}^{\mathrm{T}} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n^2 \times (n^2+1)}$$

называется *ленточной матрицей наблюдаемости*.

Пусть требуется синтезировать наблюдатель состояния ДС (1):

$$\dot{\hat{\mathbf{x}}} = \boldsymbol{A}\hat{\mathbf{x}} + \boldsymbol{l}\left(\mathbf{c}^{\mathrm{T}}\hat{\mathbf{x}} - y\right) + \mathbf{b}u. \tag{26}$$

Другими словами, необходимо с помощью закона инъекции выхода (8) обеспечить х.п.:

$$\det\left(\lambda\boldsymbol{E} - \boldsymbol{A} + \boldsymbol{l}\mathbf{c}^{\mathrm{T}}\right) = \beta_k\lambda^k + \beta_{k-1}\lambda^{k-1} + \cdots + \beta_1\lambda + \beta_0, \quad k \le n. \tag{27}$$

Повторяя рассуждения, аналогичные приведенным в предыдущем разделе, придем к справедливости теоремы.

Теорема 6. *Пусть линейная ДС* (1) *полностью наблюдаемая и имеет х.п.* (11). *Тогда матрица* $\boldsymbol{l}$ *в наблюдателе состояния* (26)*, обеспечивающая замкнутой системе х.п.* (27)*, определяется эквивалентными формулами*

$$\mathbf{l} = \left(\mathrm{Z}_1 \;\vdots\; \mathrm{Z}_2 \;\vdots\; \cdots \;\vdots\; \mathrm{Z}_{k-1} \;\vdots\; \mathrm{Z}_k\right)^{-\mathrm{T}} \begin{pmatrix} \gamma_0 - \beta_0 \\ \hdashline \gamma_1 - \beta_1 \\ \hdashline \vdots \\ \hdashline \gamma_{k-1} - \beta_{k-1} \\ \hdashline \gamma_k - \beta_k \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{l}^{\mathrm{T}} = \left(\gamma_0 - \beta_0 \mid \gamma_1 - \beta_1 \mid \cdots \mid \gamma_{k-1} - \beta_{k-1} \mid \gamma_k - \beta_k\right) \begin{pmatrix} \mathrm{Z}_1 \\ \hline \mathrm{Z}_2 \\ \hline \vdots \\ \hline \mathrm{Z}_{k-1} \\ \hline \mathrm{Z}_k \end{pmatrix}^{-1},$$

где

$$\left(\boldsymbol{I}_n \otimes \begin{pmatrix} -\mathbf{c}_R^{\perp\mathrm{T}} \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} \\ \hline \mathbf{c}_R^{\perp\mathrm{T}} \boldsymbol{E}^{\mathrm{T}} \end{pmatrix} \right)_R^{\perp} = \begin{pmatrix} \mathrm{Z}_1 \\ \hline \mathrm{Z}_2 \\ \hline \mathrm{Z}_3 \\ \hline \mathrm{Z}_4 \\ \hline \vdots \\ \hline \mathrm{Z}_{n-1} \\ \hline \mathrm{Z}_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n^2}, \ \mathrm{Z}_i \in \mathbb{R}^n .$$

Числовой пример. Рассмотрим ДС (1) с $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^3$, где числовые матрицы имеют вид

$$\boldsymbol{E} = \left(\begin{array}{c:c:c:c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ \hdashline 0 & 1 & 0 & 1 \\ \hdashline 1 & 1 & 0 & 1 \\ \hdashline 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right), \quad \boldsymbol{A} = \left(\begin{array}{c:c:c:c} -3 & 1 & 1 & -1 \\ \hdashline -1 & -1 & 0 & -1 \\ \hdashline -1 & 0 & -1 & 1 \\ \hdashline 0 & 0 & 1 & -3 \end{array}\right), \quad \mathbf{b} = \left(\begin{array}{c} 0 \\ \hdashline 0 \\ \hdashline 0 \\ \hdashline 1 \end{array}\right). \tag{28}$$

Для данной ДС выполняется условие $\det E = 0$.

Определим устойчивость данной системы и, если это необходимо, синтезируем закон управления вида (7), обеспечивающий устойчивость замкнутой системе.

Вычислим ортогональную матрицу $\mathbf{b}_L^{\perp}$ и псевдообратный вектор b^{+}. Получим

$$\mathbf{b}_L^{\perp} = \left(\begin{array}{c:c:c:c} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hdashline 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hdashline -1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right), \quad \mathbf{b}^{+} = \left(0 \mid 0 \mid 0 \mid 1\right).$$

При этом выполняется тождество $\mathbf{b}_L^{\perp}\mathbf{b}_L^{\perp\mathrm{T}} = \boldsymbol{I}_3$.

Сформируем ленточную матрицу (9) и найдем ее ортогональный правый делитель нуля (10):

$$\begin{pmatrix} \Upsilon_1 \\ \hdashline \Upsilon_2 \\ \hdashline \Upsilon_3 \\ \hdashline \Upsilon_4 \end{pmatrix}, \ \Upsilon_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ \hdashline 4 \\ \hdashline 6 \\ \hdashline 5 \end{pmatrix}, \Upsilon_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ \hdashline -3 \\ \hdashline 4 \\ \hdashline 3 \end{pmatrix}, \Upsilon_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ \hdashline -1 \\ \hdashline 2 \\ \hdashline 1 \end{pmatrix}, \Upsilon_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ \hdashline 1 \\ \hdashline -1 \\ \hdashline -1 \end{pmatrix}. \qquad (29)$$

Поскольку (29) является вектором, то в силу теоремы 1 рассматриваемая ДС является полностью управляемой.

Применяя далее формулу (12), найдем х.п. ДС (28):

$$\det\left(\lambda \boldsymbol{E} - \boldsymbol{A}\right) = -\lambda^3 + 2\lambda^2 + 7\lambda + 9. \qquad (30)$$

Поскольку х.п. (30) неустойчив, ДС (28) также является неустойчивой. Однако из (30) видно, что простая замена знака при λ^3 превращает этот полином в устойчивый.

Таким образом, предположим, что требуется определить закон регулирования (7), обеспечивающий замкнутой системе х.п.,

$$\det\left(\lambda \boldsymbol{E} - \boldsymbol{A} + \mathbf{b}\mathbf{k}^{\mathrm{T}}\right) = \lambda^3 + 2\lambda^2 + 7\lambda + 9. \qquad (31)$$

Сравнивая (30) и (31), заключаем, что

$$\left(\Delta\gamma_0 \mid \Delta\gamma_1 \mid \Delta\gamma_2 \mid \Delta\gamma_3\right) = \left(0 \mid 0 \mid 0 \mid 2\right).$$

Формируя из столбцов (29) матрицу

$$\left(\Upsilon_1 \mid \Upsilon_2 \mid \Upsilon_3 \mid \Upsilon_4\right) = \left(\begin{array}{c:c:c:c} -1 & -1 & 0 & 0 \\ \hdashline 4 & -3 & -1 & 1 \\ \hdashline 6 & 4 & 2 & -1 \\ \hdashline 5 & 3 & 1 & -1 \end{array}\right),$$

согласно формуле (23) получим

$$\mathbf{k}^{\mathrm{T}} = \left(0 \mid 0 \mid 0 \mid 2\right)\left(\begin{array}{c:c:c:c} -1 & -1 & 0 & 0 \\ \hdashline 4 & -3 & -1 & 1 \\ \hdashline 6 & 4 & 2 & -1 \\ \hdashline 5 & 3 & 1 & -1 \end{array}\right)^{-1} = \left(-4 \mid 4 \mid 2 \mid 0\right). \qquad (32)$$

При этом

$$\det\left(\lambda \boldsymbol{E} - \boldsymbol{A} + \mathbf{b}\mathbf{k}^{\mathrm{T}}\right) =$$

$$= \det\left(\lambda \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -4 & 4 & 2 & 0 \end{pmatrix} \right) =$$

$$= \lambda^3 + 2\lambda^2 + 7\lambda + 9,$$

т. е. регулятор (32) действительно обеспечивает замкнутой обратной связью ДС заданный х.п.

Заключение. В работе на основе ленточных матриц управляемости и наблюдаемости получены явные формулы синтеза регулятора и наблюдателя состояния ДС с одним входом и одним выходом, позволяющие по известным параметрам ДС, ее характеристическому полиному и заданному расположению полюсов, также выраженному в коэффициентах характеристических полиномов, рассчитать обратную связь (регулятор) и наблюдатель состояния, обеспечивающие замкнутой ДС требуемое расположение полюсов. Приведенные формулы синтеза играют для ДС такую же роль, какую играют формулы синтеза Аккерманна и Басса — Гура для линейных систем стандартного вида.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Бояринцев Ю.Е. *Линейные и нелинейные алгебро-дифференциальные системы*. Новосибирск, Наука, 2000.

[2] Голуб Дж., Ван Лоун Ч. *Матричные вычисления*. Москва, Мир, 1999.

[3] Kundur P. *Power System Stability and Control*. McGraw-Hill, Inc. 1994.

[4] Мисриханов М.Ш., Рябченко В.Н. Ленточные критерии и рекурсивные тесты полной управляемости и наблюдаемости линейных алгебро-дифференциальных систем. *АиТ*, 2008. № 9, с. 44–61.

[5] Мисриханов М.Ш., Рябченко В.Н. Алгебраические и матричные методы в теории линейных MIMO-систем. *Вестник ИГЭУ*, 2005, вып. 5, с. 187–242.

[6] Мисриханов М.Ш., Рябченко В.Н. Ленточные формулы анализа линейной алгебро-дифференциальной SISO-системы. *Вестник ИГЭУ*, 2005, вып. 5, с. 187–242.

[7] Мисриханов М.Ш., Рябченко В.Н. Ленточная формула решения задачи А.Н. Крылова. *АиТ*, 2007, № 12, с. 53–69.

[8] Kailath T. Linear Systems. Prentice Hall. Englewood Cliffs. NJ, 1980.

[9] Дорф Р., Бишоп Р. *Современные системы управления*. Москва, Лаборатория Базовых Знаний, 2004.

[10] Мисриханов М.Ш., Рябченко В.Н. Анализ и синтез линейных динамических систем на основе ленточных формул. *Вестник ИГЭУ*, 2005, вып. 5, с. 243–248.

Статья поступила в редакцию 28.06.2013

Ссылку на эту статью просим оформлять следующим образом:

Зубов Н.Е., Зыбин Е.Ю., Мисриханов М.Ш., Рябченко В.Н. Явные формулы синтеза регулятора и наблюдателя для дескрипторной системы. *Инженерный журнал: наука и инновации*, 2013, вып. 10. URL: http://engjournal.ru/catalog/it/nav/1083.html

Зубов Николай Евгеньевич — д-р техн. наук, заместитель руководителя по науке научно-технического центра ОАО «РКК ”Энергия“ имени С.П. Королёва», профессор кафедры «Системы автоматического управления» МГТУ им. Н.Э. Баумана. Автор более 70 работ в области проблем управления космических аппаратов. e-mail: Nikolay.Zubov@rsce.ru

Зыбин Евгений Юрьевич — канд. техн. наук, научный сотрудник научно-технического центра ОАО «РКК ”Энергия“ имени С.П. Королёва». Автор более 200 работ в области проблем управления.

Мисриханов Мисрихан Шапиевич — д-р техн. наук, ведущий научный сотрудник научно-технического центра ОАО «РКК ”Энергия“ имени С.П. Королёва». Автор более 150 работ в области проблем управления.

Рябченко Владимир Николаевич — д-р техн. наук, ведущий научный сотрудник научно-технического центра ОАО «РКК ”Энергия“ имени С.П. Королёва». Автор более 200 работ в области проблем управления.