

Синтез терминального релейно-импульсного управления сближением космических аппаратов

© Н.Е. Зубов^{1,2}, Е.А. Микрин^{1,2}, А.С. Олейник¹, В.Н. Рябченко¹

¹ ОАО «Ракетно-космическая корпорация "Энергия" имени С.П. Королёва»,
г. Королев Московской области, 141070, Россия

² МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, 105005, Россия

Для линейной стационарной динамической системы с релейно-импульсными исполнительными органами разработан алгоритм, позволяющий применять методы модального управления к решению задачи поиска терминального управления. С использованием предложенного алгоритма решена задача терминального управления сближением космических аппаратов с двигателями постоянной тяги, имеющими декартовую схему расположения.

Ключевые слова: сближение космических аппаратов, модальное управление, терминальное управление, метод точного размещения полюсов, круговая орбита.

Введение. До настоящего времени модальное управление применялось только для решения задач стабилизации линейных систем, и синтезированное при этом управление являлось непрерывным. Существует целый класс объектов управления с релейно-импульсными исполнительными органами. В частности, к ним относятся двигатели постоянной тяги, нашедшие применение на космических аппаратах (КА), тормозные щитки самолетов, которые традиционно имеют два рабочих положения — убранное и выпущенное. Хотя перевод этих органов из одного положения в другое осуществляется с небольшой скоростью, иногда удобно пренебрегать конечностью времени работы механизмов. Аналогично можно сказать и о тормозных щитках КА, которые могут использоваться для решения задач управления движением в атмосфере планет.

Непосредственно применять модальное управление к задаче синтеза терминального управления для линейной стационарной системы с релейно-импульсными исполнительными органами не представляется возможным, однако его можно преобразовать к виду, позволяющему получать решение, основанное на применении методов модального управления. Рассмотрению этой проблемы и посвящена данная работа.

1. Линейные стационарные объекты управления с релейно-импульсными исполнительными органами. Будем рассматривать движение объекта

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{v}_p \quad (1.1)$$

с релейно-импульсными исполнительными органами, положение которых в смысле действия «включено — выключено» с той или иной полярностью характеризует вектор \mathbf{v}_p ($\mathbf{v}_p \in \mathbb{R}^r$). Здесь матрицы \mathbf{A} и \mathbf{B} являются постоянными, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ — вектор состояния. Ставится задача: за заданное время t_k перевести систему из некоторого начального положения в заданное конечное ($\mathbf{x}_0(t_0) \in \mathbb{R}_0^n$, $\mathbf{x}(t_k) = \mathbf{x}_3$).

Для представления компонент v_{pr} вектора \mathbf{v}_p функциями времени в предположении бинарности управляющих входов будем использовать выражения вида [1, 2]

$$\begin{pmatrix} v_{p1}(t, t_1^1, t_2^1, \dots, t_\mu^1) \\ \dots \\ v_{pr}(t, t_1^r, t_2^r, \dots, t_\mu^r) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_{p10} - \Delta_{p1} \sum_{\mu=1}^{M_1} (-1)^\mu 1_r(t, t_\mu^1) \\ \dots \\ v_{pr0} - \Delta_{pr} \sum_{\mu=1}^{M_r} (-1)^\mu 1_r(t, t_\mu^r) \end{pmatrix}, \quad (1.2)$$

где v_{pr0} — одно из значений компоненты v_{pr} , принимаемое за исходное, т. е. такое значение, которое соответствует положению r -го релейного рулевого органа в начальный момент времени; Δ_{pr} — приращение скачкообразного изменения r -й компоненты с учетом знака изменения; $1_r(t, t_\mu^r) = 1_r(t - t_\mu^r)$ — единичная ступенчатая функция, соответствующая μ -му по порядку изменению компоненты v_{pr} ; M_r — число рассматриваемых скачкообразных изменений функции.

Решение неоднородной линейной стационарной системы (1.1) имеет вид

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{G}(t)\mathbf{x}_0(t_0) + \int_{t_0}^{t_k} \mathbf{G}(t - \tau)\mathbf{B}\mathbf{v}_p(\tau)d\tau, \quad (1.3)$$

где $\mathbf{G}(t)$ — матрица Грина, дающая фундаментальное решение однородной системы. Выражение $\int_{t_0}^{t_k} \mathbf{G}(t - \tau)\mathbf{B}\mathbf{v}_p(\tau)d\tau$ представляет собой

матрицу-столбец частного решения неоднородной системы, которую обозначим через \mathbf{F} и в развернутом виде с учетом (1.2) при условии $v_{pr0} = 0$ запишем следующим образом:

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}^*(t_k, t_\mu^r) \Delta = \int_{t_0}^{t_k} \mathbf{G}(t - \tau) \mathbf{B} \mathfrak{D}_p(\tau) d\tau =$$

$$= \begin{pmatrix} -\sum_{\mu=1}^{M_1} (-1)^\mu f_{11}(t_\mu^1) & \dots & -\sum_{\mu=1}^{M_r} (-1)^\mu f_{1r}(t_\mu^r) \\ \dots & \dots & \dots \\ -\sum_{\mu=1}^{M_1} (-1)^\mu f_{m1}(t_\mu^1) & \dots & -\sum_{\mu=1}^{M_r} (-1)^\mu f_{mr}(t_\mu^r) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta_{p1} \\ \dots \\ \Delta_{pr} \end{pmatrix}. \quad (1.4)$$

Отсюда следует, что решение задачи управления объектом (1.1) сводится к определению моментов времени t_μ^r , которые представляют собой непрерывные величины.

2. Терминальное управление линейной стационарной системой с релейно-импульсными рулевыми органами на основе методов модального управления. Построим (условную) дискретную систему следующего вида:

$$\mathbf{x}_p^D(t+1) = \mathbf{A}^D \mathbf{x}_p^D(t), \quad \mathbf{y} = \mathbf{C}_p \mathbf{x}_p^D, \quad (2.1)$$

где вектор $\mathbf{x}_p^D(t)$ включает компоненты

$$\mathbf{x}_x(t) = (x_1(t_k) \quad \dots \quad x_n(t_k))^T, \quad \mathbf{x}_t(t) = (t_1^1 \quad \dots \quad t_\mu^r)^T,$$

$$\mathbf{A}^D = \mathbf{I}_{(n+m) \times (n+m)}, \quad \mathbf{C}_p = (\mathbf{I}_{n \times n} \quad \mathbf{0}_{n \times m}).$$

Из (2.1) следует, что

$$\mathbf{x}_t(t+1) = \mathbf{x}_t(t), \quad (2.2)$$

при этом в соответствии с (1.3) можно также записать

$$\mathbf{x}_x(t) = \mathbf{G}(t_k) \mathbf{x}_x(t_{\text{тек}}) + \mathbf{F}(t_k, t_\mu^r). \quad (2.3)$$

Построим для системы (2.1) наблюдатель состояния полного ранга. В общем виде он определяется уравнением

$$\hat{\mathbf{x}}_p^D(t+1) = (\mathbf{A}^D - \mathbf{L}_p \mathbf{C}_p) \hat{\mathbf{x}}_p^D + \mathbf{L}_p \mathbf{y}. \quad (2.4)$$

Оценка $\hat{\mathbf{x}}_x(t)$ запишем так:

$$\hat{\mathbf{x}}_x(t) = \mathbf{G}(t_k) \hat{\mathbf{x}}_x(t_{\text{тек}}) + \mathbf{F}(t_k, \hat{t}_\mu^r). \quad (2.5)$$

Линеаризуем функцию $\mathbf{F}^*(t_k, t_\mu^r)$ в окрестности точек \hat{t}_μ^r , используя разложение в ряд Тейлора. В результате будем иметь

$$\mathbf{F}(t_k, t_\mu^r) = \mathbf{F}(t_k, \hat{t}_\mu^r) + \frac{\partial \mathbf{F}^*(t_k, \hat{t}_\mu^r)}{\partial t_\mu^r} \tilde{\mathbf{x}}_t, \quad (2.6)$$

где $\tilde{\mathbf{x}}_t(t) = (t_1^1 - \hat{t}_1^1 \quad \dots \quad t_\mu^r - \hat{t}_\mu^r)^T$.

Вычислив далее вектор невязок $\tilde{\mathbf{x}}_x = \mathbf{x}_x - \hat{\mathbf{x}}_x$, получим

$$\tilde{\mathbf{x}}_x = \frac{\partial \mathbf{F}^*(t_k, \hat{t}_\mu^r)}{\partial t_\mu^r} \tilde{\mathbf{x}}_t. \quad (2.7)$$

Объединяя затем $\tilde{\mathbf{x}}_x$ и $\tilde{\mathbf{x}}_t$ в единый вектор и используя (2.4), с учетом (2.1) получим дискретную модель уравнения невязок

$$\tilde{\mathbf{x}}_p(t+1) = \left(\left(\begin{array}{c|c} \mathbf{I}_{n \times n} & \frac{\partial \mathbf{F}^*(t_k, \hat{t}_\mu^r)}{\partial t_\mu^r} \\ \hline \mathbf{0} & \mathbf{I}_{m \times m} \end{array} \right) - \mathbf{L}_p \mathbf{C}_p \right) \tilde{\mathbf{x}}_p. \quad (2.8)$$

При выполнении условия полной наблюдаемости Калмана

$$\text{rank} \begin{pmatrix} \mathbf{C}_p \\ \hline \mathbf{C}_p \mathbf{A}_p \\ \vdots \\ \hline \mathbf{C}_p \mathbf{A}_p^{n+m-1} \end{pmatrix} = n + m, \quad (2.9)$$

где $m = M_1 + \dots + M_r$,

$$\mathbf{A}_p = \begin{pmatrix} \mathbf{I}_{n \times n} & \frac{\partial \mathbf{F}^*(t_k, \hat{t}_\mu^r)}{\partial t_\mu^r} \\ \hline \mathbf{0} & \mathbf{I}_{m \times m} \end{pmatrix}, \quad (2.10)$$

выбором матрицы коэффициентов \mathbf{L}_p при известных матрицах \mathbf{A}_p и \mathbf{C}_p всегда можно обеспечить любое заданное размещение на \mathbb{C}^{stab} корней характеристического полинома (полюсов) [3, 4]

$$\det(\lambda \mathbf{I}_n - (\mathbf{A}_p - \mathbf{L}_p \mathbf{C}_p)), \quad (2.11)$$

или, эквивалентно, собственных значений

$$\text{eig}(\mathbf{A}_p - \mathbf{L}_p \mathbf{C}_p) = \left\{ \lambda_i \in \mathbb{C} : \det(\lambda \mathbf{I}_{n+l} - (\mathbf{A}_p - \mathbf{L}_p \mathbf{C}_p)) = 0 \right\} \quad (2.12)$$

наблюдателя состояния. В этом случае нужно рассматривать вспомогательную дискретную МИМО-систему вида

$$\mu(t+1) = \mathbf{A}^T \mu + \mathbf{C}^T \eta, \quad \eta = -\mathbf{L}_p^T \mu, \quad (2.13)$$

где μ — вектор, имеющий размерность расширенного вектора \mathbf{x}_p ; η — вектор управления; $\mathbf{A}^T = \mathbf{A}_p^T$, $\mathbf{C}^T = (\mathbf{C}_p)^T$. Поиск матрицы \mathbf{L}_p в нашем случае — цель решения задачи терминального управления, поскольку идентификация моментов времени переключения релейно-импульсных исполнительных органов и является решением поставленной нами задачи. В случае выполнения условий полной наблюдаемости необходимые для решения матрицы существуют, однако их надо научиться определять.

Для решения задачи наблюдения можно применять любой из методов модального управления. Поступим так же, как в [5], и воспользуемся методом, изложенным в [3, 4]. Введем многоуровневую декомпозицию МИМО-системы (2.13), представляемую парой матриц $(\mathbf{A}^T, \mathbf{C}^T)$. Имеем

нулевой (исходный) уровень

$$\mathbf{A}_0 = \mathbf{A}^T, \quad \mathbf{B}_0 = (\mathbf{C}_p)^T = \mathbf{C}^T, \quad (2.14)$$

k-й уровень ($k = \overline{1, N}$, $N = \text{ceil}(N/r) - 1$)

$$\mathbf{A}_k = \mathbf{B}_{k-1}^\perp \mathbf{A}_{k-1} \mathbf{B}_{k-1}^{\perp-}, \quad \mathbf{B}_k = \mathbf{B}_{k-1}^\perp \mathbf{A}_{k-1} \mathbf{B}_{k-1}. \quad (2.15)$$

Здесь \mathbf{B}_i^\perp — аннулятор (делитель нуля) матрицы \mathbf{B}_i , т. е. $\mathbf{B}_i^\perp \mathbf{B}_i = 0$; $\mathbf{B}_i^{\perp-}$ — 2-полуобратная матрица для \mathbf{B}_i^\perp [3, 4], т. е. матрица, удовлетворяющая условиям регулярности

$$\mathbf{B}_i^\perp \mathbf{B}_i^{\perp-} \mathbf{B}_i^\perp = \mathbf{B}_i^\perp, \quad \mathbf{B}_i^{\perp-} \mathbf{B}_i^\perp \mathbf{B}_i^{\perp-} = \mathbf{B}_i^{\perp-}. \quad (2.16)$$

Тогда в соответствии с [3] искомая матрица $\mathbf{L} = \mathbf{L}_0 \in \mathbb{R}^{m \times n}$ вычисляется по рекурсивным формулам

$$\mathbf{L}_N = \mathbf{B}_N^+ \mathbf{A}_N - \Phi_N \mathbf{B}_N^+, \quad (2.17)$$

$$\mathbf{L}_k = \mathbf{B}_k^- \mathbf{A} - \Phi_k \mathbf{B}_k^-, \quad \mathbf{B}_k^- = \mathbf{L}_{k+1} \mathbf{B}_k^\perp + \mathbf{B}_k^+, \quad k = \overline{0, N-1}, \quad (2.18)$$

и обеспечивает точное заданное размещение полюсов. Это действительно так, поскольку все элементы множества собственных значений $\text{eig}(\mathbf{A} - \mathbf{L}\mathbf{C})$ совпадают с собственными значениями N заданных

устойчивых матриц Φ_i порядка $m \times m$, $i = \overline{0, N}$ (т. е. собственных значений, лежащих внутри единичного круга).

Подытоживая сказанное, запишем алгоритм решения задачи терминального управления линейными стационарными ММО-системами с релейно-импульсными исполнительными органами на основе методов модального управления.

1. Ищется решение (1.3) неоднородной линейной стационарной системы.

2. задается число переключений релейно-импульсного исполнительного органа в каждом канале управления (следует заметить, что оно не может быть меньше некоторого минимального значения, при котором существует решение задачи терминального управления).

3. Строятся модели: условная — (2.2) и идентификационная — (2.8).

4. Задаются начальные значения оценок \hat{t}_μ^r . На их основе в соответствии с (2.7) определяются оценки вектора состояния \hat{x}_x и тем самым формируются начальные условия для разностного дискретного уравнения невязок (2.8).

5. С помощью метода модального управления [3], определяемого выражениями (2.14)–(2.18), решается задача поиска управления вспомогательной системы (2.13), в результате которой находится транспонированная матрица L_p^T коэффициентов обратной связи наблюдателя.

6. С использованием блока $L_{pr'}^T$ на основании (2.4) находятся новые оценки времен \hat{t}_μ^r и далее в соответствии с (2.5) — новые оценки вектора состояния \hat{x}_x .

Поскольку рассматривается релейно-импульсное управление с одним уровнем переключения разной полярности, для каждой ближайшей пары переключений должно соблюдаться следующее мнемоническое правило: если первое переключение функции (1.2) положительно, то второе обязательно должно быть отрицательным или наоборот. Отсюда следует необходимость контроля значения \hat{x}_i и ограничения тех значений \hat{t}_μ^r , которые приводят к нарушению указанного правила.

3. Решение задачи терминального управления сближением космических аппаратов с двигателями постоянной тяги. Рассмотрим сближение маневрирующего КА с пассивным аппаратом, находящимся на круговой орбите.

Пусть на активном КА неизменяемой массы установлено шесть координатных двигателей постоянной тяги для управления движени-

ем центра масс — по два (один в положительном направлении, другой — в отрицательном) на каждую из трех осей прямоугольной системы координат, жестко связанной с КА. Тогда уравнение (1.1), определяющее относительное движение сближающихся космических аппаратов, запишем так

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathfrak{P}_p, \quad (3.1)$$

где $\mathbf{x} = [x_1 \ x_2 \dots \ x_6]^T$, $\mathfrak{P}_p = [\mathfrak{P}_{px} \ \mathfrak{P}_{py} \ \mathfrak{P}_{pz}]^T$,

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2\omega & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2\omega & 3\omega^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\omega^2 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

где $x_1 = x$, $x_2 = \dot{x}$, $x_3 = y$, $x_4 = \dot{y}$, $x_5 = z$, $x_6 = \dot{z}$ — фазовые координаты активного КА, $\omega = \text{const}$ — орбитальная угловая скорость пассивного КА.

Поскольку при сближении КА относительное движение в канале «z» не зависит от каналов «x—y», то для упрощения поиска терминального управления систему (3.1) представим в виде двух подсистем

$$\dot{\mathbf{x}}^1 = \mathbf{A}^1 \mathbf{x}^1 + \mathbf{B}^1 \mathfrak{P}_p^1, \quad (3.2)$$

$$\dot{\mathbf{x}}^2 = \mathbf{A}^2 \mathbf{x}^2 + \mathbf{B}^2 \mathfrak{P}_p^2, \quad (3.3)$$

где $\mathbf{x}^1 = [x_1 \ x_2 \dots \ x_4]^T$, $\mathfrak{P}_p^1 = [\mathfrak{P}_{px} \ \mathfrak{P}_{py}]^T$, $\mathbf{x}^2 = [x_5 \ x_6]^T$, $\mathfrak{P}_p^2 = [\mathfrak{P}_{pz}]$,

$$\mathbf{A}^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2\omega \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2\omega & 3\omega^2 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B}^1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B}^2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

При решении задачи сближения релейно-импульсные исполнительные органы представляют собой двигатели постоянной тяги, а вектор \mathfrak{P}_p — циклограммы работы двигателей [6]. Таким образом, выражение (1.2) в данном случае можно записать так:

$$\begin{pmatrix} \mathfrak{D}_{p1}(t, t_1^1, \dots, t_\mu^1) \\ \mathfrak{D}_{p2}(t, t_1^2, \dots, t_\mu^2) \\ \mathfrak{D}_{p3}(t, t_1^3, \dots, t_\mu^3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 - |a_x| \sum_{\mu=1}^{M_1} (-1)^\mu 1_\mu (t - t_\mu^1) \\ 0 - |a_y| \sum_{\mu=1}^{M_2} (-1)^\mu 1_\mu (t - t_\mu^2) \\ 0 - |a_z| \sum_{\mu=1}^{M_3} (-1)^\mu 1_\mu (t - t_\mu^3) \end{pmatrix}, \quad (3.4)$$

где $|a_{x(y,z)}|$ — модуль ускорения двигателя.

Будем считать, что моменты времени начала сближения t_0 и его окончания t_k заданы, причем $t_k - t_0$ фиксировано. Управление сближением будем осуществлять с использованием двухимпульсного маневра в каждом канале управления. В этом случае $M_1 = M_2 = M_3 = 4$.

Решение (1.3), представляющее дискретные модели каждой из подсистем (3.2), (3.3), имеет вид

$$\begin{pmatrix} x_1(t_k) \\ x_2(t_k) \\ x_3(t_k) \\ x_4(t_k) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{\omega}(4 \sin \tau - 3\tau) & 6(\tau - \sin \tau) & \frac{2}{\omega}(1 - \cos \tau) \\ 0 & 4 \cos \tau - 3 & 6\omega(1 - \cos \tau) & 2 \sin \tau \\ 0 & -\frac{2}{\omega}(1 - \cos \tau) & 4 - 3 \cos \tau & \frac{1}{\omega} \sin \tau \\ 0 & -2 \sin \tau & 3\omega \sin \tau & \cos \tau \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ x_4(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\sum_{\mu=1}^4 (-1)^\mu f_{11}(t_\mu^1) & -\sum_{\mu=1}^4 (-1)^\mu f_{12}(t_\mu^2) \\ -\sum_{\mu=1}^4 (-1)^\mu f_{21}(t_\mu^1) & -\sum_{\mu=1}^4 (-1)^\mu f_{22}(t_\mu^2) \\ -\sum_{\mu=1}^4 (-1)^\mu f_{31}(t_\mu^1) & -\sum_{\mu=1}^4 (-1)^\mu f_{32}(t_\mu^2) \\ -\sum_{\mu=1}^4 (-1)^\mu f_{41}(t_\mu^1) & -\sum_{\mu=1}^4 (-1)^\mu f_{42}(t_\mu^2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix}, \quad (3.5)$$

$$\begin{pmatrix} x_5(t_k) \\ x_6(t_k) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \tau & \frac{1}{\omega} \sin \tau \\ -\omega \sin \tau & \cos \tau \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_5(t) \\ x_6(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\sum_{\mu=1}^4 (-1)^\mu f_{11}^z(t_\mu^3) \\ -\sum_{\mu=1}^4 (-1)^\mu f_{21}^z(t_\mu^3) \end{pmatrix} (a_z),$$

где $\tau = \omega(t_k - t_0)$, $\tau_\mu^1 = \omega(t_k - t_\mu^1)$, $\tau_\mu^2 = \omega(t_k - t_\mu^2)$,

$$\begin{aligned} \tau_\mu^3 = \omega(t_k - t_\mu^3) \tau_{\mu z}, - \sum_{\mu=1}^4 (-1)^\mu f_1(t_\mu^1) = \\ = - \frac{4}{\omega^2} \sum_{\mu=1}^4 (-1)^\mu \left(1 - \cos \tau_\mu^1 - \frac{3}{8} (\tau_\mu^1)^2 \right), \end{aligned} \quad (3.6)$$

$$\begin{aligned} - \sum_{\mu=1}^4 (-1)^\mu f_{12}(t_\mu^2) &= - \frac{2}{\omega^2} \sum_{\mu=1}^M (-1)^\mu (\tau_\mu^2 - \sin \tau_\mu^2), \\ - \sum_{\mu=1}^4 (-1)^\mu f_{21}(t_\mu^1) &= - \frac{1}{\omega} \sum_{\mu=1}^M (-1)^\mu (4 \sin \tau_\mu^1 - 3 \tau_\mu^1), \\ - \sum_{\mu=1}^4 (-1)^\mu f_{22}(t_\mu^2) &= - \frac{2}{\omega} \sum_{\mu=1}^M (-1)^\mu (1 - \cos \tau_\mu^2), \\ - \sum_{\mu=1}^4 (-1)^\mu f_{31}(t_\mu^1) &= - \frac{2}{\omega^2} \sum_{\mu=1}^M (-1)^\mu (\sin \tau_\mu^1 - \tau_\mu^1), \\ - \sum_{\mu=1}^4 (-1)^\mu f_{32}(t_\mu^2) &= - \frac{1}{\omega^2} \sum_{\mu=1}^M (-1)^\mu (1 - \cos \tau_\mu^2), \\ - \sum_{\mu=1}^4 (-1)^\mu f_{41}(t_\mu^1) &= - \frac{2}{\omega} \sum_{\mu=1}^M (-1)^\mu (\cos \tau_\mu^1 - 1), \\ - \sum_{\mu=1}^4 (-1)^\mu f_{42}(t_\mu^2) &= - \frac{1}{\omega} \sum_{\mu=1}^M (-1)^\mu \sin \tau_\mu^2, \\ - \sum_{\mu=1}^4 (-1)^\mu f_{11}^z(t_\mu^3) &= - \frac{1}{\omega^2} \sum_{\mu=1}^M (-1)^\mu (1 - \cos \tau_\mu^3), \\ - \sum_{\mu=1}^4 (-1)^\mu f_{21}^z(t_\mu^3) &= - \frac{1}{\omega} \sum_{\mu=1}^M (-1)^\mu \sin \tau_\mu^3. \end{aligned}$$

Как видно, выражения (3.5), (3.6) в соответствии с (2.1) представляют собой решение (2.2) для подсистем (3.2), (3.3). Для сокращения размерности вектора идентификационных параметров будем считать, что момент первого включения двигателей в каждом канале управления фиксирован и совпадает со временем начала сближения. Соответственно, момент последнего выключения двигателей в трех каналах также фиксирован и равен времени окончания сближения. В результате для каждой из подсистем выражение (2.2) в развернутом виде запишем следующим образом:

а) первая подсистема

$$t_1^1(t+1) = t_1^1(t), t_2^1(t+1) = t_2^1(t), t_1^2(t+1) = t_1^2(t), t_2^2(t+1) = t_2^2(t);$$

б) вторая подсистема

$$t_1^3(t+1) = t_1^3(t), t_2^3(t+1) = t_2^3(t).$$

В таком случае дискретные модели (3.5), (3.6) будут иметь вид

$$\begin{pmatrix} x_1(t_k) \\ x_2(t_k) \\ x_3(t_k) \\ x_4(t_k) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{\omega}(4\sin\tau - 3\tau) & 6(\tau - \sin\tau) & \frac{2}{\omega}(1 - \cos\tau) \\ 0 & 4\cos\tau - 3 & 6\omega(1 - \cos\tau) & 2\sin\tau \\ 0 & -\frac{2}{\omega}(1 - \cos\tau) & 4 - 3\cos\tau & \frac{1}{\omega}\sin\tau \\ 0 & -2\sin\tau & 3\omega\sin\tau & \cos\tau \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ x_4(t) \end{pmatrix} +$$

$$\begin{pmatrix} \pm\left(\frac{4}{\omega^2}(1 - \cos\tau - \frac{3}{8}\tau^2)\right) \pm\left(-\sum_{\mu=1}^2(-1)^\mu f_{11}(t_\mu^1)\right) & \pm\left(\frac{2}{\omega^2}(\tau - \sin\tau)\right) \pm\left(-\sum_{\mu=1}^2(-1)^\mu f_{12}(t_\mu^2)\right) \\ \pm\left(\frac{1}{\omega}(4\sin\tau - 3\tau)\right) \pm\left(-\sum_{\mu=1}^2(-1)^\mu f_{21}(t_\mu^1)\right) & \pm\frac{2}{\omega}(1 - \cos\tau) \pm\left(-\sum_{\mu=1}^2(-1)^\mu f_{22}(t_\mu^2)\right) \\ \pm\left(\frac{2}{\omega^2}(\sin\tau - \tau)\right) \pm\left(-\sum_{\mu=1}^2(-1)^\mu f_{31}(t_\mu^1)\right) & \pm\left(\frac{1}{\omega^2}(1 - \cos\tau)\right) \pm\left(-\sum_{\mu=1}^2(-1)^\mu f_{32}(t_\mu^2)\right) \\ \pm\frac{2}{\omega}(\cos\tau - 1) \pm\left(-\sum_{\mu=1}^2(-1)^\mu f_{41}(t_\mu^1)\right) & \pm\frac{1}{\omega}\sin\tau \pm\left(-\sum_{\mu=1}^2(-1)^\mu f_{42}(t_\mu^2)\right) \end{pmatrix} \times$$

$$\begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix}, \quad (3.7)$$

$$\begin{pmatrix} x_5(t_k) \\ x_6(t_k) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\tau & \frac{1}{\omega}\sin\tau \\ -\omega\sin\tau & \cos\tau \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_5(t) \\ x_6(t) \end{pmatrix} +$$

$$\begin{pmatrix} \pm\frac{1}{\omega^2}(1 - \cos\tau) \pm\left(-\sum_{\mu=1}^2(-1)^\mu f_{11}^z(t_\mu^3)\right) \\ \pm\frac{1}{\omega}\sin\tau \pm\left(-\sum_{\mu=1}^2(-1)^\mu f_{21}^z(t_\mu^3)\right) \end{pmatrix} (a_z). \quad (3.8)$$

Знак в выражениях, входящих в (3.7), (3.8), определяется начальными условиями сближения.

Матрица \hat{A}_{1p}^* , входящая в уравнение невязок вида (2.8), будет равна

а) для первой подсистемы

$$\hat{\mathbf{A}}_{1p}^* = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & b_{11} & b_{12} & b_{13} & b_{14} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & b_{21} & b_{22} & b_{23} & b_{24} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & b_{31} & b_{32} & b_{33} & b_{34} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & b_{41} & b_{42} & b_{43} & b_{44} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (3.9)$$

где обозначены

$$\begin{aligned} b_{11} &= \pm 4 \frac{a_x}{\omega^2} \left(\frac{3}{4} \omega^2 (t_k - t_1^1) - \omega \sin(\omega(t_k - t_1^1)) \right), \\ b_{12} &= \pm 4 \frac{a_x}{\omega^2} \left(\frac{3}{4} \omega^2 (t_k - t_2^1) - \omega \sin(\omega(t_k - t_2^1)) \right), \\ b_{13} &= \pm 2 \frac{a_y}{\omega^2} (\omega \cos(\omega(t_k - t_1^2)) - \omega), \quad b_{14} = \pm 2 \frac{a_y}{\omega^2} (\omega \cos(\omega(t_k - t_2^2)) - \omega), \\ b_{21} &= \pm \frac{a_x}{\omega} (3\omega - 4\omega \cos(\omega(t_k - t_1^1))), \quad b_{22} = \pm \frac{a_x}{\omega} (3\omega - 4\omega \cos(\omega(t_k - t_2^1))), \\ b_{23} &= \pm 2 \frac{a_y}{\omega} \omega \sin(\omega(t_k - t_1^2)), \quad b_{24} = \pm 2 \frac{a_y}{\omega} \omega \sin(\omega(t_k - t_2^2)), \\ b_{31} &= \pm 2 \frac{a_x}{\omega^2} (\omega \cos(\omega(t_k - t_1^1)) - \omega), \quad b_{32} = \pm 2 \frac{a_x}{\omega^2} (\omega \cos(\omega(t_k - t_2^1)) - \omega), \\ b_{33} &= \pm \frac{a_y}{\omega^2} \omega \sin(\omega(t_k - t_1^2)), \quad b_{34} = \pm \frac{a_y}{\omega^2} \omega \sin(\omega(t_k - t_2^2)), \\ b_{41} &= \pm \frac{a_x}{\omega} \omega \sin(\omega(t_k - t_1^1)), \quad b_{42} = \pm \frac{a_x}{\omega} \omega \sin(\omega(t_k - t_2^1)), \\ b_{43} &= \pm \frac{a_y}{\omega^2} \omega \cos(\omega(t_k - t_1^2)), \quad b_{44} = \pm \frac{a_y}{\omega^2} \omega \cos(\omega(t_k - t_2^2)); \end{aligned} \quad (3.10)$$

б) для второй подсистемы

$$\hat{\mathbf{A}}_{2p}^* = \begin{pmatrix} 1 & 0 & b_{11}^z & b_{12}^z \\ 0 & 1 & b_{21}^z & b_{22}^z \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (3.11)$$

Здесь введены обозначения

$$\begin{aligned} b_{11}^z &= \pm \frac{a_z}{\omega} \omega \sin(\omega(t_k - t_1^3)), & b_{12}^z &= \pm \frac{a_z}{\omega} \omega \sin(\omega(t_k - t_2^3)), \\ b_{21}^z &= \pm \frac{a_z}{\omega} \omega \cos(\omega(t_k - t_1^3)), & b_{22}^z &= \pm \frac{a_z}{\omega} \omega \cos(\omega(t_k - t_2^3)). \end{aligned} \quad (3.12)$$

Знаки в выражениях (3.10), (3.12) определяются соответствующими знаками в соотношениях (3.7), (3.8).

Применим изложенный в разделе 2 (выражения (2.14)–(2.18)) подход к решению задачи идентификации моментов времени включения или выключения двигателей. Для этого определим число уровней декомпозиции. В нашем случае размерности подпространств состояний, описывающих вспомогательную систему (2.13), равны $N_1 = 8, N_2 = 4$, размерности векторов управления $r_1 = 4, r_2 = 2$, при этом число уровней декомпозиции для каждой из подсистем определяется функцией

$$J = \text{ceil}(N_i / r_i) - 1 = 1,$$

т. е. равно двум (нулевой и первый уровни декомпозиции). В соответствии с (2.13) и на основании (3.9), (3.11) имеем

$$\mathbf{A}_1^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ b_{11} & b_{21} & b_{31} & b_{41} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ b_{12} & b_{22} & b_{32} & b_{42} & 0 & 1 & 0 & 0 \\ b_{13} & b_{23} & b_{33} & b_{43} & 0 & 0 & 1 & 0 \\ b_{14} & b_{24} & b_{34} & b_{44} & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{C}_1^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{A}_2^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ b_{11}^z & b_{21}^z & 1 & 0 \\ b_{12}^z & b_{22}^z & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{C}_1^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Согласно (2.14) нулевой уровень декомпозиции для рассматриваемых подсистем имеет вид $\mathbf{A}_0^1 = \mathbf{A}_1^T, \mathbf{A}_0^2 = \mathbf{A}_2^T, \mathbf{B}_0^1 = \mathbf{C}_1^T, \mathbf{B}_0^2 = \mathbf{C}_2^T$. Для нахождения первого уровня декомпозиции вычислим матрицы-аннуляторы

$$(\mathbf{B}_0^1)^\perp = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, (\mathbf{B}_0^2)^\perp = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$(\mathbf{B}_0^1)^{\perp-} = (\mathbf{B}_0^1)^{\perp T}, (\mathbf{B}_0^2)^{\perp-} = (\mathbf{B}_0^2)^{\perp T}.$$

Далее в соответствии с (2.15) получим

$$\mathbf{A}_1^1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \mathbf{A}_1^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{B}_1^1 = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{21} & b_{31} & b_{41} \\ b_{12} & b_{22} & b_{32} & b_{42} \\ b_{13} & b_{23} & b_{33} & b_{43} \\ b_{14} & b_{24} & b_{34} & b_{44} \end{pmatrix}, \mathbf{B}_1^2 = \begin{pmatrix} b_{11}^z & b_{21}^z \\ b_{12}^z & b_{22}^z \end{pmatrix}.$$

Чтобы воспользоваться выражениями (2.17), (2.18), определим 2-полуобратные матрицы

$$\mathbf{B}_0^{1+} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \mathbf{B}_0^{2+} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

и назначим матрицы $\Phi_1^1, \Phi_1^2, \Phi_0^1, \Phi_0^2$ для соответствующих подсистем в следующем простом виде

$$\Phi_1^1 = \begin{pmatrix} \lambda_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_{13} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_{14} \end{pmatrix}, \Phi_1^2 = \begin{pmatrix} \lambda_{21}^z & 0 \\ 0 & \lambda_{22}^z \end{pmatrix},$$

$$\Phi_0^1 = \begin{pmatrix} \lambda_{01} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_{02} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_{03} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_{04} \end{pmatrix}, \Phi_0^2 = \begin{pmatrix} \lambda_{01}^z & 0 \\ 0 & \lambda_{02}^z \end{pmatrix},$$

полагая, что все их элементы расположены внутри $\mathbb{C}^{\text{stab}} \doteq \mathbb{C}_{|\lambda|<1}$. Тогда в соответствии с (2.17) получим

$$\mathbf{L}_1^{1\Gamma} = \begin{pmatrix} (\lambda_{11} - 1)l_{11}/D & -(\lambda_{12} - 1)l_{12}/D & (\lambda_{13} - 1)l_{13}/D & -(\lambda_{14} - 1)l_{14}/D \\ -(\lambda_{11} - 1)l_{21}/D & (\lambda_{12} - 1)l_{22}/D & -(\lambda_{13} - 1)l_{23}/D & (\lambda_{14} - 1)l_{24}/D \\ (\lambda_{11} - 1)l_{31}/D & -(\lambda_{12} - 1)l_{32}/D & (\lambda_{13} - 1)l_{33}/D & -(\lambda_{14} - 1)l_{34}/D \\ -(\lambda_{11} - 1)l_{41}/D & (\lambda_{12} - 1)l_{42}/D & -(\lambda_{13} - 1)l_{43}/D & (\lambda_{14} - 1)l_{44}/D \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{L}_1^{2\Gamma} = \begin{pmatrix} b_{22}^z(\lambda_{21}^z - 1)/D^z & b_{21}^z(\lambda_{22}^z - 1)/D^z \\ b_{12}^z(\lambda_{21}^z - 1)/D^z & b_{11}^z(\lambda_{22}^z - 1)/D^z \end{pmatrix},$$

где

$$\begin{aligned} l_{11} &= b_{22}b_{33}b_{44} - b_{22}b_{34}b_{43} - b_{23}b_{32}b_{44} + b_{23}b_{34}b_{42} + b_{24}b_{32}b_{43} - b_{24}b_{33}b_{42}, \\ l_{12} &= b_{21}b_{33}b_{44} - b_{21}b_{34}b_{43} - b_{23}b_{31}b_{44} + b_{23}b_{34}b_{41} + b_{24}b_{31}b_{43} - b_{24}b_{33}b_{41}, \\ l_{13} &= b_{21}b_{32}b_{44} - b_{21}b_{34}b_{42} - b_{22}b_{31}b_{44} + b_{22}b_{34}b_{41} + b_{24}b_{31}b_{42} - b_{24}b_{32}b_{41}, \\ l_{14} &= b_{21}b_{32}b_{43} - b_{21}b_{33}b_{42} - b_{22}b_{31}b_{43} + b_{22}b_{33}b_{41} + b_{23}b_{31}b_{42} - b_{23}b_{32}b_{41}, \\ l_{21} &= b_{12}b_{33}b_{44} - b_{12}b_{34}b_{43} - b_{13}b_{32}b_{44} + b_{13}b_{34}b_{42} + b_{14}b_{32}b_{43} - b_{14}b_{33}b_{42}, \\ l_{22} &= b_{11}b_{33}b_{44} - b_{11}b_{34}b_{43} - b_{13}b_{31}b_{44} + b_{13}b_{34}b_{41} + b_{14}b_{31}b_{43} - b_{14}b_{33}b_{41}, \\ l_{23} &= b_{11}b_{32}b_{44} - b_{11}b_{34}b_{42} - b_{12}b_{31}b_{44} + b_{12}b_{34}b_{41} + b_{14}b_{31}b_{42} - b_{14}b_{32}b_{41}, \\ l_{24} &= b_{11}b_{32}b_{43} - b_{11}b_{33}b_{42} - b_{12}b_{31}b_{43} + b_{12}b_{33}b_{41} + b_{13}b_{31}b_{42} - b_{13}b_{32}b_{41}, \\ l_{31} &= b_{12}b_{23}b_{44} - b_{12}b_{24}b_{43} - b_{13}b_{22}b_{44} + b_{13}b_{24}b_{42} + b_{14}b_{22}b_{43} - b_{14}b_{23}b_{42}, \\ l_{32} &= b_{11}b_{23}b_{44} - b_{11}b_{24}b_{43} - b_{13}b_{21}b_{44} + b_{13}b_{24}b_{41} + b_{14}b_{21}b_{43} - b_{14}b_{23}b_{41}, \\ l_{33} &= b_{11}b_{22}b_{44} - b_{11}b_{24}b_{42} - b_{12}b_{21}b_{44} + b_{12}b_{24}b_{41} + b_{14}b_{21}b_{42} - b_{14}b_{22}b_{41}, \\ l_{34} &= b_{11}b_{22}b_{43} - b_{11}b_{23}b_{42} - b_{12}b_{21}b_{43} + b_{12}b_{23}b_{41} + b_{13}b_{21}b_{42} - b_{13}b_{22}b_{41}, \\ l_{41} &= b_{12}b_{23}b_{34} - b_{12}b_{24}b_{33} - b_{13}b_{22}b_{34} + b_{13}b_{24}b_{32} + b_{14}b_{22}b_{33} - b_{14}b_{23}b_{32}, \\ l_{42} &= b_{11}b_{23}b_{34} - b_{11}b_{24}b_{33} - b_{13}b_{21}b_{34} + b_{13}b_{24}b_{31} + b_{14}b_{21}b_{33} - b_{14}b_{23}b_{31}, \\ l_{43} &= b_{11}b_{22}b_{34} - b_{11}b_{24}b_{32} - b_{12}b_{21}b_{34} + b_{12}b_{24}b_{31} + b_{14}b_{21}b_{32} - b_{14}b_{22}b_{31}, \\ l_{44} &= b_{11}b_{22}b_{33} - b_{11}b_{23}b_{32} - b_{12}b_{21}b_{33} + b_{12}b_{23}b_{31} + b_{13}b_{21}b_{32} - b_{13}b_{22}b_{31}, \\ D &= b_{11}b_{22}b_{33}b_{44} - b_{11}b_{22}b_{34}b_{43} - b_{11}b_{23}b_{32}b_{44} + b_{11}b_{23}b_{34}b_{42} + b_{11}b_{24}b_{32}b_{43} - \\ &- b_{11}b_{24}b_{33}b_{42} - b_{12}b_{21}b_{33}b_{44} + b_{12}b_{21}b_{34}b_{43} + b_{12}b_{23}b_{31}b_{44} - b_{12}b_{23}b_{34}b_{41} - \\ &- b_{12}b_{24}b_{31}b_{43} + b_{12}b_{24}b_{33}b_{41} + b_{13}b_{21}b_{32}b_{44} - b_{13}b_{21}b_{34}b_{42} - b_{13}b_{22}b_{31}b_{44} + \\ &+ b_{13}b_{22}b_{34}b_{41} + b_{13}b_{24}b_{31}b_{42} - b_{13}b_{24}b_{32}b_{41} - b_{14}b_{21}b_{32}b_{43} + b_{14}b_{21}b_{33}b_{42} + \\ &+ b_{14}b_{22}b_{31}b_{43} - b_{14}b_{22}b_{33}b_{41} - b_{14}b_{23}b_{31}b_{42} + b_{14}b_{23}b_{32}b_{41}, \\ D^z &= b_{11}^z b_{22}^z - b_{12}^z b_{21}^z. \end{aligned}$$

Используя выражение (2.18), можно вычислить для каждой подсистемы транспонированную матрицу L_p^T обратных связей наблюдателя. Учитывая ее громоздкость, выделим блок, касающийся оценивания моментов времени t_μ^r . В результате получим

$$\mathbf{L}_t^1 = \frac{1}{D} \times \begin{pmatrix} -(\lambda_{01}-1)(\lambda_{11}-1)l_{11} & (\lambda_{02}-1)(\lambda_{11}-1)l_{21} & -(\lambda_{03}-1)(\lambda_{11}-1)l_{31} & (\lambda_{04}-1)(\lambda_{11}-1)l_{41} \\ (\lambda_{01}-1)(\lambda_{12}-1)l_{12} & -(\lambda_{02}-1)(\lambda_{12}-1)l_{22} & (\lambda_{03}-1)(\lambda_{12}-1)l_{32} & -(\lambda_{04}-1)(\lambda_{12}-1)l_{42} \\ -(\lambda_{01}-1)(\lambda_{13}-1)l_{13} & (\lambda_{02}-1)(\lambda_{13}-1)l_{23} & -(\lambda_{03}-1)(\lambda_{13}-1)l_{33} & (\lambda_{04}-1)(\lambda_{13}-1)l_{43} \\ (\lambda_{01}-1)(\lambda_{14}-1)l_{14} & -(\lambda_{02}-1)(\lambda_{14}-1)l_{24} & (\lambda_{03}-1)(\lambda_{14}-1)l_{34} & -(\lambda_{04}-1)(\lambda_{14}-1)l_{44} \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{L}_t^2 = \frac{1}{D^z} \begin{pmatrix} -(\lambda_{01}^z-1)(\lambda_{21}^z-1)b_{22}^z & (\lambda_{02}^z-1)(\lambda_{22}^z-1)b_{12}^z \\ (\lambda_{01}^z-1)(\lambda_{21}^z-1)b_{21}^z & -(\lambda_{02}^z-1)(\lambda_{22}^z-1)b_{11}^z \end{pmatrix}.$$

Наконец, в соответствии с (2.4) уравнение оценки моментов времени \hat{t}_μ^r включения и выключения двигателей с той или иной полярностью запишутся следующим образом:

$$\begin{pmatrix} \hat{t}_1^1 \\ \hat{t}_2^1 \\ \hat{t}_1^2 \\ \hat{t}_2^2 \\ \hat{t}_1^3 \\ \hat{t}_2^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{L}_t^1 & \mathbf{0}_{(2 \times 2)} \\ \mathbf{0}_{(4 \times 4)} & \mathbf{L}_t^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \\ \tilde{x}_3 \\ \tilde{x}_4 \\ \tilde{x}_5 \\ \tilde{x}_6 \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим численный пример сближения. Предположим, что двигательная установка имеет параметры $|a_x| = |a_y| = |a_z| = 0,04 \text{ мс}^{-2}$. Начальное положение активного КА относительно пассивного характеризуется следующими значениями фазовых координат: $x_0 = 5000 \text{ м}$, $y_0 = z_0 = 4000 \text{ м}$, $\dot{x}_0 = \dot{y}_0 = \dot{z}_0 = -1,0 \text{ мс}^{-1}$. Поставим задачу перевода активного КА из заданного положения в конечное $x_k = \dot{x}_k = y_k = \dot{y}_k = z_k = \dot{z}_k = 0$ за время $t_k - t_0 = 1055 \text{ с}$. Поскольку момент первого включения двигателей в каждом канале управления фиксирован и совпадает со временем начала сближения, определим полярность первого импульса для каждого канала. Для этого применим методику расчета двухимпульсного маневра [7]. В результате для заданных начальных условий сближения получим: в канале x первый импульс положительный, в каналах y, z — отрицательный. Соответственно для второго импульса поканально имеем: x — положительный, y —

отрицательный, z — положительный. В качестве начальных оценок \hat{t}_μ^r примем значения $\hat{t}_1^1 = \hat{t}_1^2 = \hat{t}_1^3 = 0$, $\hat{t}_2^1 = \hat{t}_2^2 = \hat{t}_2^3 = 1055$ с. В результате исходная циклограмма включения двигателей будет иметь вид, представленный на рис. 1. На основании направлений импульсов уравнения оценки (2.8) для наших подсистем запишем так

$$\begin{pmatrix} x_1(t_k) \\ x_2(t_k) \\ x_3(t_k) \\ x_4(t_k) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{\omega}(4\sin\tau - 3\tau) & 6(\tau - \sin\tau) & \frac{2}{\omega}(1 - \cos\tau) \\ 0 & 4\cos\tau - 3 & 6\omega(1 - \cos\tau) & 2\sin\tau \\ 0 & -\frac{2}{\omega}(1 - \cos\tau) & 4 - 3\cos\tau & \frac{1}{\omega}\sin\tau \\ 0 & -2\sin\tau & 3\omega\sin\tau & \cos\tau \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ x_4(t) \end{pmatrix} +$$

$$+ \begin{pmatrix} \frac{4}{\omega^2}(1 - \cos\tau - \frac{3}{8}\tau^2) - (-\sum_{\mu=1}^2 (-1)^\mu f_{11}(t_\mu^1)) & -\frac{2}{\omega^2}(\tau - \sin\tau) + (-\sum_{\mu=1}^2 (-1)^\mu f_{12}(t_\mu^2)) \\ \frac{1}{\omega}(4\sin\tau - 3\tau) - (-\sum_{\mu=1}^2 (-1)^\mu f_{21}(t_\mu^1)) & -\frac{2}{\omega}(1 - \cos\tau) + (-\sum_{\mu=1}^2 (-1)^\mu f_{22}(t_\mu^2)) \\ \frac{2}{\omega^2}(\sin\tau - \tau) - (-\sum_{\mu=1}^2 (-1)^\mu f_{31}(t_\mu^1)) & -\frac{1}{\omega^2}(1 - \cos\tau) + (-\sum_{\mu=1}^2 (-1)^\mu f_{32}(t_\mu^2)) \\ \frac{2}{\omega}(\cos\tau - 1) - (-\sum_{\mu=1}^2 (-1)^\mu f_{41}(t_\mu^1)) & -\frac{1}{\omega}\sin\tau + (-\sum_{\mu=1}^2 (-1)^\mu f_{42}(t_\mu^2)) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} x_5(t_k) \\ x_6(t_k) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\tau & \frac{1}{\omega}\sin\tau \\ -\omega\sin\tau & \cos\tau \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_5(t) \\ x_6(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{1}{\omega^2}(1 - \cos\tau) + \sum_{\mu=1}^2 f_{11}^z(t_\mu^3) \\ -\frac{1}{\omega}\sin\tau + \sum_{\mu=1}^2 f_{21}^z(t_\mu^3) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_z \end{pmatrix}.$$

При этом значения параметров, входящих в (3.10), (3.12), будут равны

$$b_{11}^z = -\frac{a_z}{\omega^2} \omega \sin(\omega(t_k - t_1^3)), \quad b_{12}^z = -\frac{a_z}{\omega^2} \omega \sin(\omega(t_k - t_2^3)),$$

$$b_{21}^z = -\frac{a_z}{\omega} \omega \cos(\omega(t_k - t_1^3)), \quad b_{22}^z = -\frac{a_z}{\omega} \omega \cos(\omega(t_k - t_2^3)),$$

$$b_{11} = -4\frac{a_x}{\omega^2} \left(\frac{3}{4}\omega^2(t_k - t_1^1) - \omega \sin(\omega(t_k - t_1^1)) \right),$$

$$b_{12} = 4\frac{a_x}{\omega^2} \left(\frac{3}{4}\omega^2(t_k - t_2^1) - \omega \sin(\omega(t_k - t_2^1)) \right),$$

$$b_{13} = \frac{a_y}{\omega^2} (\omega \cos(\omega(t_k - t_1^2)) - \omega), \quad b_{14} = -2\frac{a_y}{\omega^2} (\omega \cos(\omega(t_k - t_2^2)) - \omega),$$

$$b_{21} = -\frac{a_x}{\omega}(3\omega - 4\omega \cos(\omega(t_k - t_1^1))), b_{22} = \frac{a_x}{\omega}(3\omega - 4\omega \cos(\omega(t_k - t_2^1))),$$

$$b_{23} = -2\frac{a_y}{\omega}\omega \sin(\omega(t_k - t_1^2)), b_{24} = -\frac{a_y}{\omega}\omega \sin(\omega(t_k - t_2^2)),$$

$$b_{31} = 2\frac{a_x}{\omega^2}(\omega \cos(\omega(t_k - t_1^1)) - \omega), b_{32} = -2\frac{a_x}{\omega^2}(\omega \cos(\omega(t_k - t_2^1)) - \omega),$$

$$b_{33} = -\frac{a_y}{\omega^2}\omega \sin(\omega(t_k - t_1^2)), b_{34} = \frac{a_y}{\omega^2}\omega \sin(\omega(t_k - t_2^2)),$$

$$b_{41} = -\frac{a_x}{\omega}\omega \sin(\omega(t_k - t_1^1)), b_{42} = \frac{a_x}{\omega}\omega \sin(\omega(t_k - t_2^1)),$$

$$b_{43} = -\frac{a_y}{\omega^2}\omega \cos(\omega(t_k - t_1^2)), b_{44} = \frac{a_y}{\omega^2}\omega \cos(\omega(t_k - t_2^2)).$$

Для получения максимальной скорости сходимости оценки моментов времени t_μ^r значения всех корней $\lambda_{11}, \lambda_{12}, \lambda_{13}, \lambda_{14}, \lambda_{01}, \lambda_{02}, \lambda_{03}, \lambda_{04}, \lambda_{01}^z, \lambda_{02}^z, \lambda_{21}^z, \lambda_{22}^z$ примем равными нулю. В этом случае, как показали результаты моделирования, все промахи сближения за четыре такта итераций ($i = 4$) практически сводятся к нулю. Графики значений оценок t_μ^r и величин промаха \tilde{x} фазовых координат и скоростей на каждом такте представлены на рис. 2 и 3. Окончательная циклограмма работы двигателей, сформировавшаяся в результате решения терминальной задачи сближения КА, приведена на рис. 4, а соответствующие ей изменения компонент вектора состояния от времени сближения — на рис. 5.

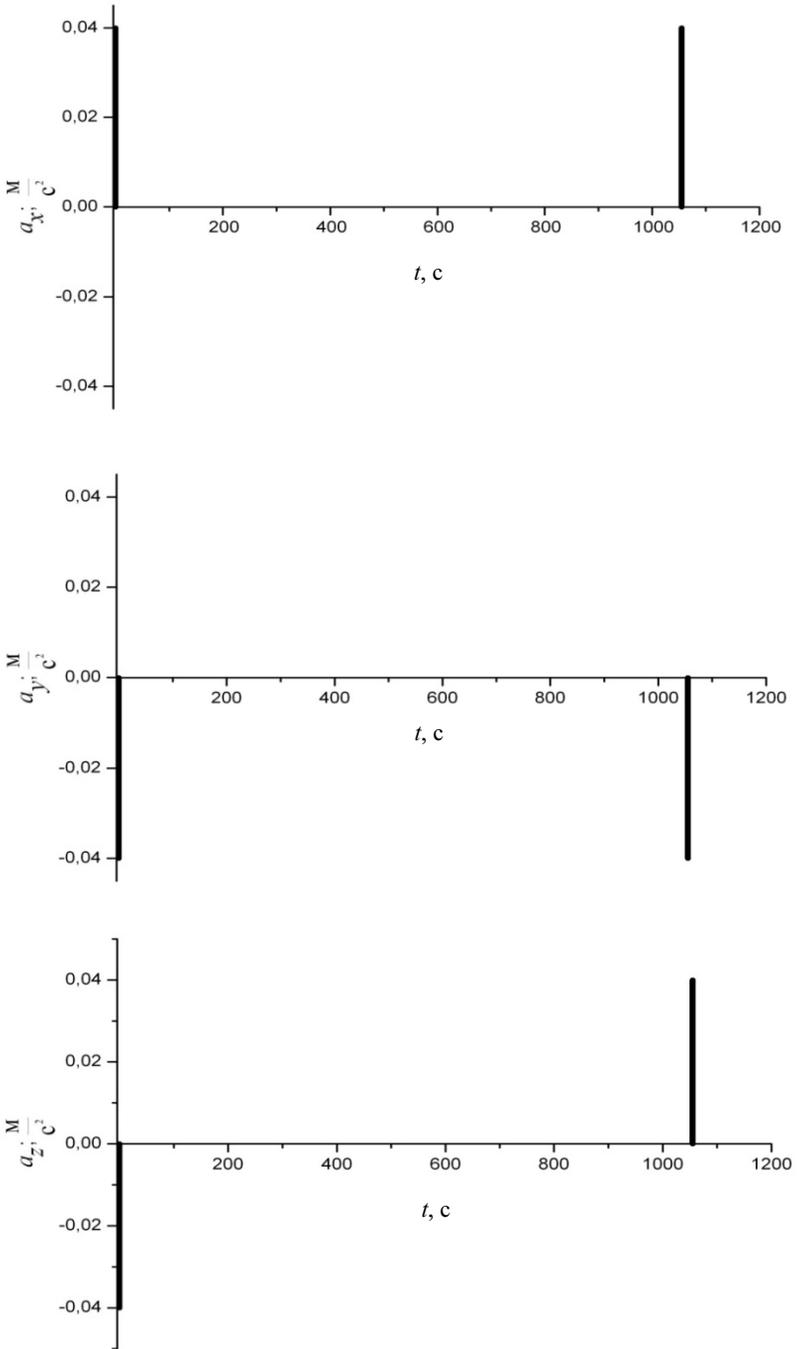


Рис. 1

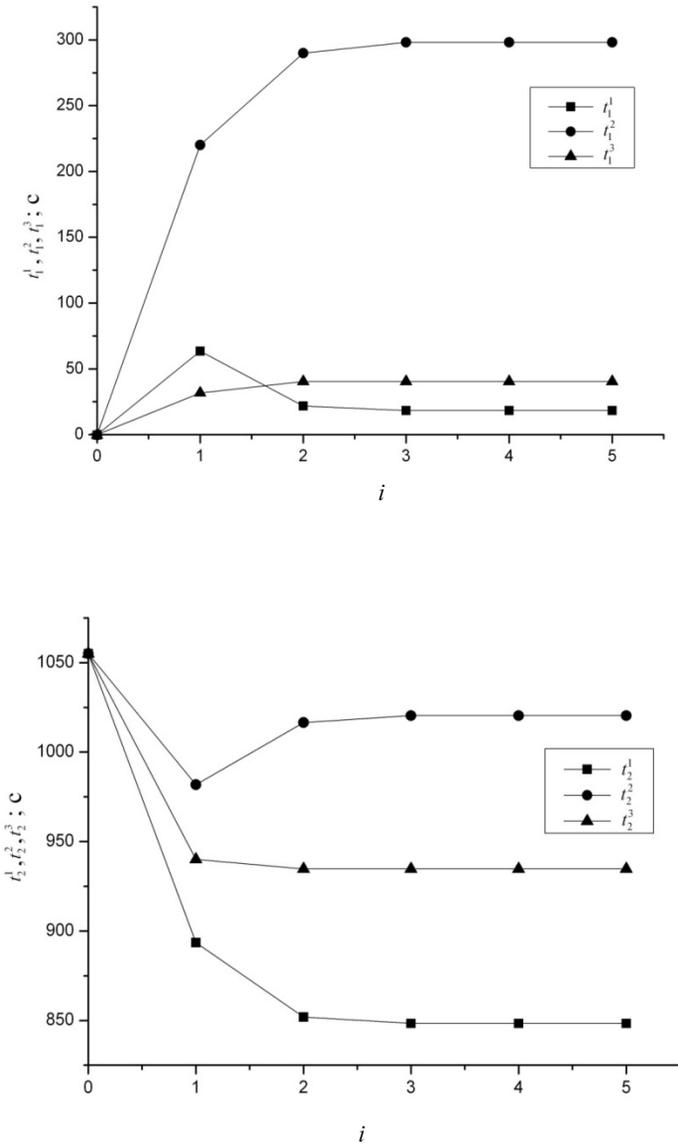


Рис. 2

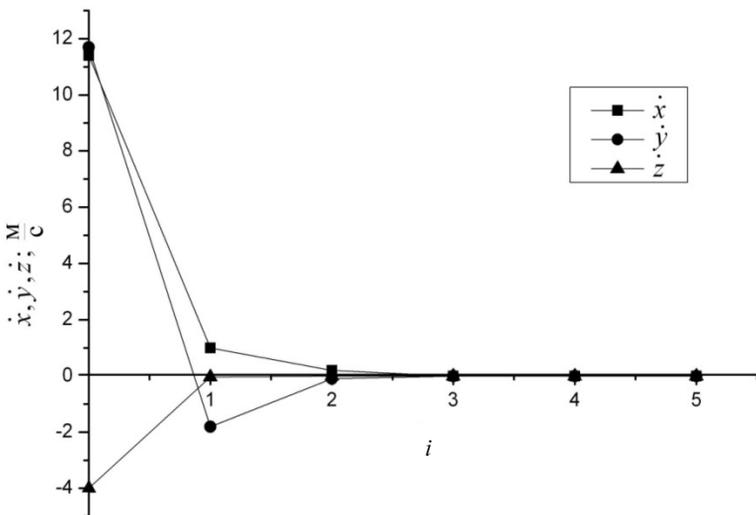
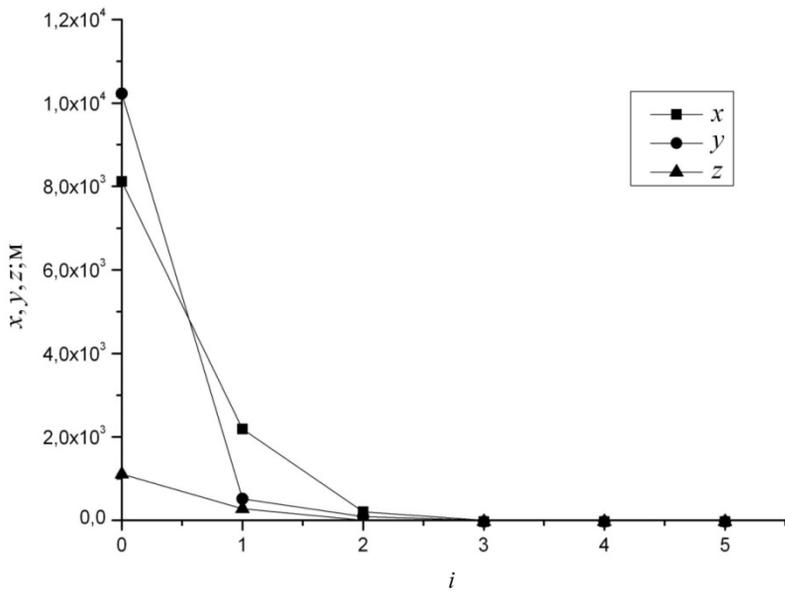


Рис. 3

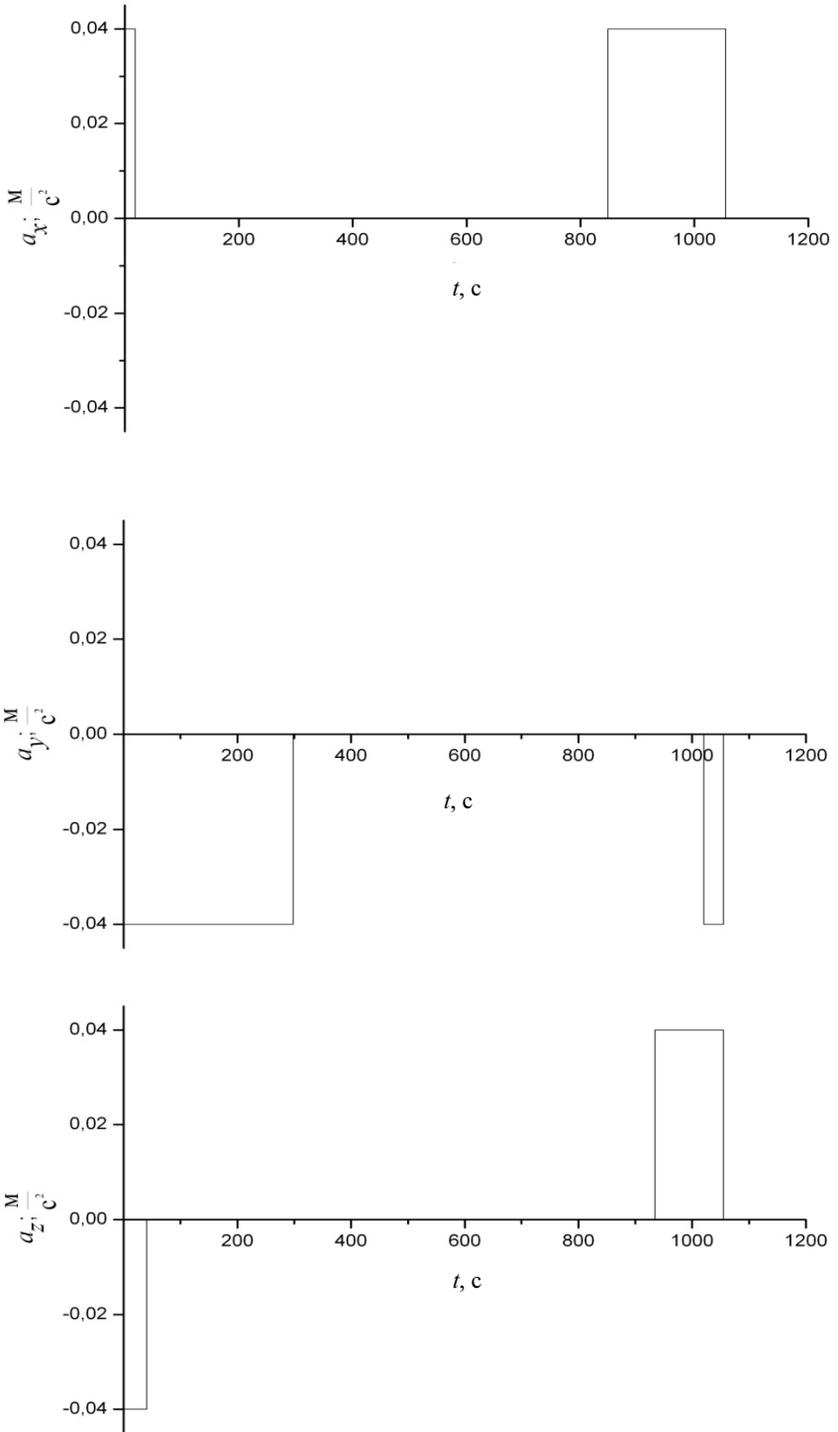


Рис. 4

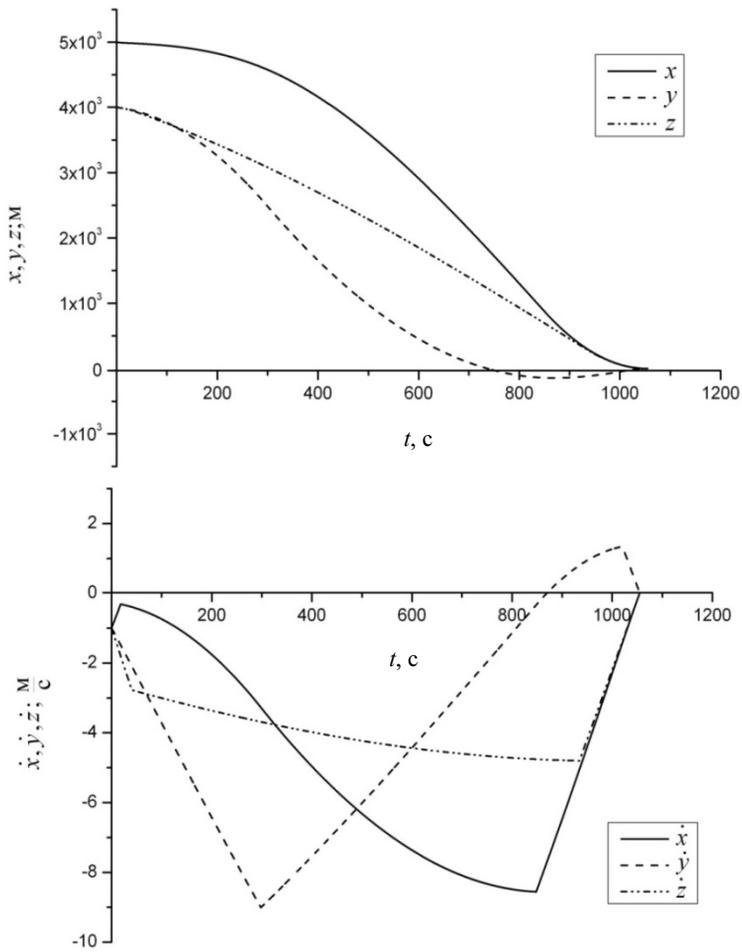


Рис. 5

Заключение. Для линейной стационарной ММО-системы с релейно-импульсными исполнительными органами разработан алгоритм, позволяющий применять методы модального управления к решению задачи поиска терминального управления. Показано, что в этом случае на основании аналитического решения уравнений объекта и представления исполнительных органов функциями времени необходимо построить дискретную модель оценки моментов времени задействования релейно-импульсных исполнительных органов и с помощью одного из методов модального управления решить классическую задачу синтеза наблюдателя. С использованием предложенного алгоритма в работе аналитически решена задача терминального управления сближением космических аппаратов с двигателями постоянной тяги, имеющими декартовую схему расположения. Преимущество данного решения относительно ранее полученного с применением алгоритма с прогнозирующей моделью и приведенного в [6] заключается:

1) в построении закона управления, обеспечивающего лучшую точность терминального управления с одновременной стабилизацией движения КА, поскольку проведенные в детерминированной постановке статистические испытания моделирования процесса сближения для одной и той же области начальных условий, приведенной в [6], с применением подхода, изложенного в настоящей статье, дали следующие результаты. Точностные характеристики в момент окончания процесса сближения по таким показателям, как средние значения компонент вектора состояния и среднее квадратическое отклонение по этим компонентам, практически равно нулю, поскольку по абсолютной величине они меньше 10^{-5} . Соответственно для решения, представленного в [6], эти показатели находятся в пределах:

$$x_1(t_k) = -0,01, x_2(t_k) = -0,03, x_3(t_k) = 0,011,$$

$$x_4(t_k) = 0,016, x_5(t_k) = 0, x_6(t_k) = -0,09,$$

$$\sigma_{x_1} = 0,35, \sigma_{x_2} = 0,11, \sigma_{x_3} = 0,42, \sigma_{x_4} = 0,12, \sigma_{x_5} = 0,31, \sigma_{x_6} = 0,02;$$

2) в отсутствии ограничений на начальные условия сближения.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Буков В.Н., Зубов Н.Е. Релейное управление на основе алгоритма с прогнозирующей моделью. *Авт.*, 1986, т. 27, с. 36–42.
- [2] Зубов Н.Е. Управление объектами с релейно-импульсными и непрерывными органами на основе алгоритма с прогнозирующей моделью и его применение в динамике сближения КА. *Космич. исслед.*, 1989, т. 27, вып. 2, с. 92–108.
- [3] Зубов Н.Е., Микрин Е.А., Мисриханов М.Ш., Рябченко В.Н. Модификация метода точного размещения полюсов и его применение в задачах управления движением космического аппарата. *Изв. РАН. ТуСУ*, 2013, № 2, с. 118–132.
- [4] Зубов Н.Е., Микрин Е.А., Мисриханов М.Ш. и др. Синтез развязывающих законов стабилизации орбитальной ориентации космического аппарата. *Изв. РАН. ТуСУ*, 2012, № 1, с. 92–108.
- [5] Зубов Н.Е., Микрин Е.А., Мисриханов М.Ш., Рябченко В.Н., Тимakov С.Н. Применение метода точного размещения полюсов к решению задач наблюдения и идентификации. *Изв. РАН. ТуСУ*, 2013, № 1, с. 135–151.
- [6] Зубов Н.Е. Синтез управления сближением КА по методу свободных траекторий на основе алгоритма с прогнозирующей моделью. *Космич. исслед.*, 1990, т. 27, вып. 4, с. 206–213.
- [7] Гончаревский В.С. *Радиоуправление сближением космических аппаратов*. Москва, Сов. Радио, 1976.

Статья поступила в редакцию 28.06.2013

Ссылку на эту статью просим оформлять следующим образом:

Зубов Н.Е., Микрин Е.А., Олейник А.С., Рябченко В.Н. Синтез терминального релейно-импульсного управления сближением космических аппаратов. *Инженерный журнал: наука и инновации*, 2013, вып. 10. URL: <http://engjournal.ru/catalog/it/nav/1082.html>

Зубов Николай Евгеньевич — д-р техн. наук, заместитель руководителя по науке научно-технического центра ОАО «РКК ”Энергия“ имени С.П. Королёва», профессор кафедры «Системы автоматического управления» МГТУ им. Н.Э. Баумана. Автор более 70 работ в области проблем управления космических аппаратов. e-mail: Nikolay.Zubov@rsce.ru

Микрин Евгений Анатольевич — д-р техн. наук, академик РАН, первый заместитель генерального конструктора ОАО «РКК ”Энергия“ имени С.П. Королёва», заведующий кафедрой «Системы автоматического управления» МГТУ им. Н.Э. Баумана. Автор более 100 работ в области проблем управления космических аппаратов.

Олейник Алексей Сергеевич — аспирант ОАО «РКК ”Энергия“ имени С.П. Королёва». Автор 2 работ в области проблем управления космических аппаратов.

Рябченко Владимир Николаевич — д-р техн. наук, ведущий научный сотрудник ОАО «РКК ”Энергия“ имени С.П. Королёва». Автор более 200 работ в области проблем управления.