УДК 681.51

Одновременная стабилизация SIMO-систем

© М.Ш. Мисриханов[1], В.Н. Рябченко[1], Н.Е. Зубов[1,2], Е.А. Микрин[1,2]

[1] ОАО «Ракетно-космическая корпорация ”Энергия“ имени С.П. Королёва», г. Королев Московской области, 141070, Россия

[2] МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, 105005, Россия

На основе ленточных матриц специальной структуры определены необходимые условия одновременной стабилизации линейных SIMO-систем. Приведены практические примеры решения задач одновременной стабилизации SIMO-систем.

Ключевые слова: *линейные SIMO-системы, ленточные матрицы, одновременная стабилизация, регулятор, характеристический полином.*

Проблема одновременной стабилизации многомерных динамических систем характерна для многих практических приложений, когда требуется поддерживать (осуществлять) асимптотическую устойчивость объекта управления, параметры которого меняются от режима к режиму, причем информация об этих изменениях отсутствует либо недостоверна.

В данной работе приводятся необходимые условия и практические примеры одновременной стабилизации, полученные на основе ленточных матриц специальной структуры.

Заданы: линейные SIMO-системы (Single Input Multi Output)

$$\dot{\mathbf{x}}_1(t) = \mathbf{A}_1\mathbf{x}_1(t) + \mathbf{b}_1 u_1(t), \tag{1}$$

$$\dot{\mathbf{x}}_2(t) = \mathbf{A}_2\mathbf{x}_2(t) + \mathbf{b}_2 u_2(t), \tag{2}$$

где $\mathbf{x}_1(t) \in \mathbb{R}^n$ — вектор состояния 1-й системы; $u_1(t) \in \mathbb{R}^1$ — скалярный вход 1-й системы; $\mathbf{x}_2(t) \in \mathbb{R}^n$ — вектор состояния 2-й системы; $u_2(t) \in \mathbb{R}^1$ — скалярный вход 2-й системы; $\mathbb{R}$ — множество действительных чисел.

Требуется: найти регулятор $\mathbf{k} \in \mathbb{R}^n$ такой, что с помощью законов управления

$$u_1(t) = -\mathbf{k}^{\mathrm{T}}\mathbf{x}_1(t), \tag{3}$$

$$u_2(t) = -\mathbf{k}^{\mathrm{T}}\mathbf{x}_2(t) \tag{4}$$

одновременно стабилизируются SIMO-системы (1) и (2).

Решение.

Рассмотрим *характеристические полиномы* матриц $\mathbf{A}_1$ и $\mathbf{A}_2$

$$\det\left(\lambda \boldsymbol{I}_n - \mathbf{A}_i\right) = \lambda^n + \alpha_{n-1}^i \lambda^{n-1} + \ldots + \alpha_1^i \lambda + \alpha_0^{(i)}, \tag{5}$$

где i — индекс, принимающий значения 1 и 2; $\boldsymbol{I}_n$ — единичная матрица размера $n \times n$; $\lambda \in \mathbb{C}$; $\mathbb{C}$ — множество комплексных чисел.

Обозначим через $\mathbf{0}_{1\times n}$ нулевую строку размера $1\times n$, тогда компактная запись *ленточной матрицы управляемости* i-й системы имеет вид

$$\left(\begin{array}{c:c:c:c:c} -\mathbf{b}_i^{\perp}\mathbf{A}_i & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \hdashline \mathbf{b}_i^{\perp} & -\mathbf{b}_i^{\perp}\mathbf{A}_i & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \hdashline \mathbf{0} & \mathbf{b}_i^{\perp} & -\mathbf{b}_i^{\perp}\mathbf{A}_i & \cdots & \mathbf{0} \\ \hdashline \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{b}_i^{\perp} & \ddots & \vdots \\ \hdashline \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & -\mathbf{b}_i^{\perp}\mathbf{A}_i \\ \hdashline \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{b}_i^{\perp} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c} \mathbf{0}_{1\times n} \\ \hdashline \boldsymbol{I}_n \end{array}\right) \otimes \mathbf{b}_i^{\perp} - \left(\begin{array}{c} \boldsymbol{I}_n \\ \hdashline \mathbf{0}_{1\times n} \end{array}\right) \otimes \left(\mathbf{b}_i^{\perp}\mathbf{A}_i\right).$$

Здесь $\otimes$ — символ операции *кронекерова произведения*. Символом $\mathbf{b}_i^{\perp} \in \mathbb{R}^{(n-1)\times n}$ обозначена матрица — *левый делитель нуля* (*аннулятор*) ранга $n - 1$ [1], т. е.

$$\mathbf{b}_i^{\perp}\mathbf{b} = 0_{(n-1)\times 1}\,.$$

Для полностью управляемой динамической SIMO-системы между коэффициентами $\alpha_i^{(i)}$ характеристического полинома (5) и ленточной матрицей управляемости

$$\left(\begin{array}{c} \mathbf{0}_{1\times n} \\ \hdashline \boldsymbol{I}_n \end{array}\right) \otimes \mathbf{b}_i^{\perp} - \left(\begin{array}{c} \boldsymbol{I}_n \\ \hdashline \mathbf{0}_{1\times n} \end{array}\right) \otimes \left(\mathbf{b}_i^{\perp}\mathbf{A}_i\right) \tag{6}$$

имеется следующая однозначная взаимосвязь:

$$\left(\begin{array}{c} \alpha_0^{(i)} \\ \hdashline \alpha_0^{(i)} \\ \hdashline \vdots \\ \hdashline \alpha_{n-2}^{(i)} \\ \hdashline \alpha_{n-1}^{(i)} \\ \hdashline 1 \end{array}\right) = \left(\left(\begin{array}{c} \mathbf{0}_{1\times n} \\ \hdashline \boldsymbol{I}_n \end{array}\right) \otimes \mathbf{b}_i^{+} - \left(\begin{array}{c} \boldsymbol{I}_n \\ \hdashline \mathbf{0}_{1\times n} \end{array}\right) \otimes \left(\mathbf{b}_i^{+}\mathbf{A}_i\right)\right) \left(\begin{array}{c} \Upsilon_1^{(i)} \\ \hdashline \Upsilon_2^{(i)} \\ \hdashline \vdots \\ \hdashline \Upsilon_{n-1}^{(i)} \\ \hdashline \Upsilon_n^{(i)} \end{array}\right), \tag{7}$$

Здесь

$$\left(\left(\begin{array}{c}\mathbf{0}_{1\times n}\\ \hdashline \boldsymbol{I}_n\end{array}\right)\otimes\mathbf{b}_i^{\perp}-\left(\begin{array}{c}\boldsymbol{I}_n\\ \hdashline \mathbf{0}_{1\times n}\end{array}\right)\otimes\left(\mathbf{b}_i^{\perp}\mathbf{A}_i\right)\right)_R^{\perp}=\left(\begin{array}{c}\boldsymbol{\Upsilon}_1^{(i)}\\ \hdashline \boldsymbol{\Upsilon}_2^{(i)}\\ \hdashline \vdots\\ \hdashline \boldsymbol{\Upsilon}_{n-1}^{(i)}\\ \hdashline \boldsymbol{\Upsilon}_n^{(i)}\end{array}\right),\quad \boldsymbol{\Upsilon}_j^{(i)}\in\mathbb{R}^n,\quad \mathbf{b}_i^{+}\boldsymbol{\Upsilon}_n^{(i)}=1, \tag{8}$$

$$\left(\begin{array}{c}\mathbf{0}_{1\times n}\\ \hdashline \boldsymbol{I}_n\end{array}\right)\otimes\mathbf{b}_i^{+}-\left(\begin{array}{c}\boldsymbol{I}_n\\ \hdashline \mathbf{0}_{1\times n}\end{array}\right)\otimes\left(\mathbf{b}_i^{+}\mathbf{A}_i\right)=\left(\begin{array}{c:c:c:c:c}-\mathbf{b}_i^{+}\mathbf{A}_i & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0}\\ \hdashline \mathbf{b}_i^{+} & -\mathbf{b}_i^{+}\mathbf{A}_i & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0}\\ \hdashline \mathbf{0} & \mathbf{b}_i^{+} & -\mathbf{b}_i^{+}\mathbf{A}_i & \cdots & \mathbf{0}\\ \hdashline \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{b}_i^{+} & \ddots & \vdots\\ \hdashline \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & -\mathbf{b}_i^{+}\mathbf{A}_i\\ \hdashline \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{b}_i^{+}\end{array}\right). \tag{9}$$

При этом замыкание обратной связью вида

$$u_i(t)=-\mathbf{k}^{\mathrm{T}}\mathbf{x}_i(t) \tag{10}$$

определяет следующие закономерности:

$$\det\left(\lambda\boldsymbol{I}_n-\mathbf{A}_i+\mathbf{b}_i\mathbf{k}^{\mathrm{T}}\right)=\lambda^n+\beta_{n-1}^{(i)}\lambda^{n-1}+\cdots+\beta_1^{(i)}\lambda+\beta_0^{(i)}, \tag{11}$$

$$\left(\begin{array}{c}\beta_0^{(i)}\\ \hdashline \beta_1^{(i)}\\ \hdashline \vdots\\ \hdashline \beta_{n-2}^{(i)}\\ \hdashline \beta_{n-1}^{(i)}\end{array}\right)-\left(\begin{array}{c}\alpha_0^{(i)}\\ \hdashline \alpha_1^{(i)}\\ \hdashline \vdots\\ \hdashline \alpha_{n-2}^{(i)}\\ \hdashline \alpha_{n-1}^{(i)}\end{array}\right)=\left(\begin{array}{c:c:c:c:c}\Upsilon_1^{(i)} & \Upsilon_2^{(i)} & \cdots & \Upsilon_{n-1}^{(i)} & \Upsilon_n^{(i)}\end{array}\right)^{\mathrm{T}}\left(\begin{array}{c}k_1\\ \hdashline k_2\\ \hdashline \vdots\\ \hdashline k_{n-1}\\ \hdashline k_n\end{array}\right), \tag{12}$$

где

$$\left(\begin{array}{c:c:c:c:c}k_1 & k_2 & \cdots & k_{n-1} & k_n\end{array}\right)=\mathbf{k}^{\mathrm{T}}.$$

Вводя обозначения

$$\beta^{(i)}=\left(\begin{array}{c}\beta_0^{(i)}\\ \hdashline \beta_1^{(i)}\\ \hdashline \vdots\\ \hdashline \beta_{n-2}^{(i)}\\ \hdashline \beta_{n-1}^{(i)}\end{array}\right),\ \alpha^{(i)}=\left(\begin{array}{c}\alpha_0^{(i)}\\ \hdashline \alpha_1^{(i)}\\ \hdashline \vdots\\ \hdashline \alpha_{n-2}^{(i)}\\ \hdashline \alpha_{n-1}^{(i)}\end{array}\right),\quad \mathcal{T}_{A_i}^{\mathrm{T}}=\left(\begin{array}{c:c:c:c:c}\Upsilon_1^{(i)} & \Upsilon_2^{(i)} & \cdots & \Upsilon_{n-1}^{(i)} & \Upsilon_n^{(i)}\end{array}\right)^{\mathrm{T}}, \tag{13}$$

перепишем уравнение (12) в компактном виде

$$\beta^{(i)} - \alpha^{(i)} = \mathcal{T}_{A_i}^{\mathrm{T}}\mathbf{k}. \tag{14}$$

Если законы управления (10) стабилизируют SIMO-системы (1), (2), то в правой части уравнений (14) векторы $\beta^{(i)}$ представляют коэффициенты устойчивых полиномов.

Уравнения (14) в силу выполнения условий невырожденности матриц $\mathcal{T}_{A_i}$ (т. е. при условии полной управляемости SIMO-систем)

$$\det \mathcal{T}_{A_i} \neq 0 \tag{15}$$

могут быть переписаны как

$$\mathcal{T}_{A_i}^{-\mathrm{T}}\left(\beta^{(i)} - \alpha^{(i)}\right) = \mathbf{k} \tag{16}$$

или эквивалентно

$$\mathcal{T}_{A_i}^{-\mathrm{T}}\beta^{(i)} - \mathcal{T}_{A_i}^{-\mathrm{T}}\alpha^{(i)} = \mathbf{k}\,. \tag{17}$$

При подстановке $i = 1,\ 2$ в (17) получаем

$$\begin{cases} \mathcal{T}_{A_1}^{-\mathrm{T}}\beta^{(1)} - \mathcal{T}_{A_1}^{-\mathrm{T}}\alpha^{(1)} = \mathbf{k}, \\ \mathcal{T}_{A_2}^{-\mathrm{T}}\beta^{(2)} - \mathcal{T}_{A_2}^{-\mathrm{T}}\alpha^{(2)} = \mathbf{k}, \end{cases} \tag{18}$$

и далее

$$\mathcal{T}_{A_1}^{-\mathrm{T}}\beta^{(1)} - \mathcal{T}_{A_1}^{-\mathrm{T}}\alpha^{(1)} = \mathcal{T}_{A_2}^{-\mathrm{T}}\beta^{(2)} - \mathcal{T}_{A_2}^{-\mathrm{T}}\alpha^{(2)}\,. \tag{19}$$

Группируя в (19) члены таким образом, чтобы в правой части оставались независимые от введения обратной связи члены, получаем

$$\mathcal{T}_{A_1}^{-\mathrm{T}}\beta^{(1)} - \mathcal{T}_{A_2}^{-\mathrm{T}}\beta^{(2)} = \mathcal{T}_{A_1}^{-\mathrm{T}}\alpha^{(1)} - \mathcal{T}_{A_2}^{-\mathrm{T}}\alpha^{(2)}, \tag{20}$$

или в другом виде

$$\left(\mathcal{T}_{A_1}^{-\mathrm{T}} \;\vdots\; -\mathcal{T}_{A_2}^{-\mathrm{T}}\right)\begin{pmatrix} \beta^{(1)} \\ \hdashline \beta^{(2)} \end{pmatrix} = \left(\mathcal{T}_{A_1}^{-\mathrm{T}} \;\vdots\; -\mathcal{T}_{A_2}^{-\mathrm{T}}\right)\begin{pmatrix} \alpha^{(1)} \\ \hdashline \alpha^{(2)} \end{pmatrix}. \tag{21}$$

Матричное уравнение (21) в силу структуры матрицы

$$\left(\mathcal{T}_{A_1}^{-\mathrm{T}} \;\vdots\; -\mathcal{T}_{A_2}^{-\mathrm{T}}\right) \in \mathbb{R}^{n \times 2n}, \tag{22}$$

очевидно имеющей *полный ранг по строкам*, всегда является **совместным** с **множеством решений**

$$\left(\begin{array}{c}\beta^{(1)}\\ \hdashline \beta^{(2)}\end{array}\right)=\left(\mathcal{T}_{A_1}^{-\mathrm{T}}\;\vdots\;-\mathcal{T}_{A_2}^{-\mathrm{T}}\right)^{+}\left(\mathcal{T}_{A_1}^{-\mathrm{T}}\;\vdots\;-\mathcal{T}_{A_2}^{-\mathrm{T}}\right)\left(\begin{array}{c}\alpha^{(1)}\\ \hdashline \alpha^{(2)}\end{array}\right)+\left(\mathcal{T}_{A_1}^{-\mathrm{T}}\;\vdots\;-\mathcal{T}_{A_2}^{-\mathrm{T}}\right)^{\perp}\varphi\,. \quad (23)$$

Не уменьшая общности, можно положить, что

$$\left(\mathcal{T}_{A_1}^{-\mathrm{T}}\;\vdots\;-\mathcal{T}_{A_2}^{-\mathrm{T}}\right)^{+}=0,5\left(\begin{array}{c}\mathcal{T}_{A_1}^{\mathrm{T}}\\ \hdashline -\mathcal{T}_{A_2}^{\mathrm{T}}\end{array}\right), \quad (24)$$

$$\left(\mathcal{T}_{A_1}^{-\mathrm{T}}\;\vdots\;-\mathcal{T}_{A_2}^{-\mathrm{T}}\right)^{\perp}=\left(\begin{array}{c}\mathcal{T}_{A_1}^{\mathrm{T}}\\ \hdashline \mathcal{T}_{A_2}^{\mathrm{T}}\end{array}\right), \quad (25)$$

формулу (23) также можно преобразовать следующим образом:

$$\left(\begin{array}{c}\beta^{(1)}\\ \hdashline \beta^{(2)}\end{array}\right)=0,5\left(\begin{array}{c}\mathcal{T}_{A_1}^{\mathrm{T}}\\ \hdashline -\mathcal{T}_{A_2}^{\mathrm{T}}\end{array}\right)\left(\mathcal{T}_{A_1}^{-\mathrm{T}}\;\vdots\;-\mathcal{T}_{A_2}^{-\mathrm{T}}\right)\left(\begin{array}{c}\alpha^{(1)}\\ \hdashline \alpha^{(2)}\end{array}\right)+\left(\begin{array}{c}\mathcal{T}_{A_1}^{\mathrm{T}}\\ \hdashline \mathcal{T}_{A_2}^{\mathrm{T}}\end{array}\right)\varphi,$$

$$\left(\begin{array}{c}\beta^{(1)}\\ \hdashline \beta^{(2)}\end{array}\right)=0,5\left(\begin{array}{c:c}\mathcal{T}_{A_1}^{\mathrm{T}}\mathcal{T}_{A_1}^{-\mathrm{T}} & -\mathcal{T}_{A_1}^{\mathrm{T}}\mathcal{T}_{A_2}^{-\mathrm{T}}\\ \hdashline -\mathcal{T}_{A_2}^{\mathrm{T}}\mathcal{T}_{A_1}^{-\mathrm{T}} & -\mathcal{T}_{A_2}^{\mathrm{T}}\mathcal{T}_{A_2}^{-\mathrm{T}}\end{array}\right)\left(\begin{array}{c}\alpha^{(1)}\\ \hdashline \alpha^{(2)}\end{array}\right)+\left(\begin{array}{c}\mathcal{T}_{A_1}^{\mathrm{T}}\\ \hdashline \mathcal{T}_{A_2}^{\mathrm{T}}\end{array}\right)\varphi,$$

$$\left(\begin{array}{c}\beta^{(1)}\\ \hdashline \beta^{(2)}\end{array}\right)=0,5\left(\begin{array}{c:c}\boldsymbol{I}_n & -\mathcal{T}_{A_1}^{\mathrm{T}}\mathcal{T}_{A_2}^{-\mathrm{T}}\\ \hdashline -\mathcal{T}_{A_2}^{\mathrm{T}}\mathcal{T}_{A_1}^{-\mathrm{T}} & \boldsymbol{I}_n\end{array}\right)\left(\begin{array}{c}\alpha^{(1)}\\ \hdashline \alpha^{(2)}\end{array}\right)+\left(\begin{array}{c}\mathcal{T}_{A_1}^{\mathrm{T}}\\ \hdashline \mathcal{T}_{A_2}^{\mathrm{T}}\end{array}\right)\varphi, \quad (26)$$

или в раскрытом виде

$$\begin{aligned}2\beta^{(1)}&=\alpha^{(1)}-\mathcal{T}_{A_1}^{\mathrm{T}}\mathcal{T}_{A_2}^{-\mathrm{T}}\alpha^{(2)}+2\mathcal{T}_{A_1}^{\mathrm{T}}\varphi=\alpha^{(1)}-\mathcal{T}_{A_1}^{\mathrm{T}}\left(\mathcal{T}_{A_2}^{-\mathrm{T}}\alpha^{(2)}-2\varphi\right),\\ 2\beta^{(2)}&=\alpha^{(2)}-\mathcal{T}_{A_2}^{\mathrm{T}}\mathcal{T}_{A_1}^{-\mathrm{T}}\alpha^{(1)}+2\mathcal{T}_{A_2}^{\mathrm{T}}\varphi=\alpha^{(2)}-\mathcal{T}_{A_2}^{\mathrm{T}}\left(\mathcal{T}_{A_1}^{-\mathrm{T}}\alpha^{(1)}-2\varphi\right).\end{aligned} \quad (27)$$

Ясно, что законы управления (10) будут стабилизировать SIMO-системы (1), (2), *если и только если существует вектор*

$$\varphi\in\mathbb{R}^{n}, \quad (28)$$

при котором векторы

$$\beta^{(i)}=\left(\begin{array}{c}\beta_0^{(i)}\\ \hdashline \beta_1^{(i)}\\ \hdashline \vdots\\ \hdashline \beta_{n-2}^{(i)}\\ \hdashline \beta_{n-1}^{(i)}\end{array}\right),\quad i=1,2, \quad (29)$$

представляют устойчивые полиномы.

Таким образом, задача *одновременной стабилизации* SIMO-систем (1) и (2) сводится к задаче выбора вектора (28) во множестве решений (26), (27).

Если указанный вектор выбран, то регулятор, одновременно стабилизирующий SIMO-системы (1) и (2), находится по формуле (16), при этом полиномы и собственные значения матриц

$$\mathbf{A}_i - \mathbf{b}_i \left(\beta^{(i)} - \alpha^{(i)}\right)^{\mathrm{T}} \mathcal{T}_{A_i}^{-1} \tag{30}$$

являются устойчивыми.

Схематично задача одновременной стабилизации двух систем приведена на рис. 1.

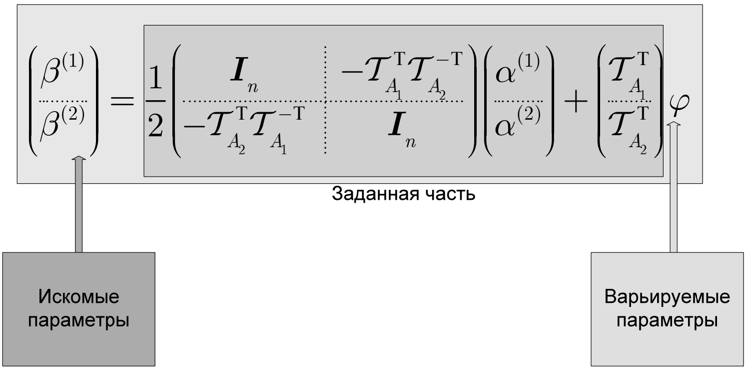

Рис. 1. Задача одновременной стабилизации двух систем

Из (26) вытекают *необходимые условия* одновременной стабилизации.

Лемма 1. *Для одновременной стабилизации линейных SIMO-систем*

$$\dot{\mathbf{x}}_1(t) = \mathbf{A}_1\mathbf{x}_1(t) + \mathbf{b}_1 u_1(t),$$

$$\dot{\mathbf{x}}_2(t) = \mathbf{A}_2\mathbf{x}_2(t) + \mathbf{b}_2 u_2(t)$$

регулятором $\mathbf{k} \in \mathbb{R}^n$ *в законах управления*

$$u_1(t) = -\mathbf{k}^{\mathrm{T}}\mathbf{x}_1(t),$$

$$u_2(t) = -\mathbf{k}^{\mathrm{T}}\mathbf{x}_2(t)$$

необходимо существование решения $\varphi \in \mathbb{R}^n$ *линейного матричного неравенства*

$$\begin{pmatrix} \mathcal{T}_{A_1}^{\mathrm{T}} \\ \hdashline \mathcal{T}_{A_2}^{\mathrm{T}} \end{pmatrix} \varphi + 0,5 \left(\begin{array}{c:c} \boldsymbol{I}_n & -\mathcal{T}_{A_1}^{\mathrm{T}} \mathcal{T}_{A_2}^{-\mathrm{T}} \\ \hdashline -\mathcal{T}_{A_2}^{\mathrm{T}} \mathcal{T}_{A_1}^{-\mathrm{T}} & \boldsymbol{I}_n \end{array} \right) \begin{pmatrix} \alpha^{(1)} \\ \hdashline \alpha^{(2)} \end{pmatrix} > 0 . \qquad (31)$$

Доказательство леммы 1. Действительно, решение задачи одновременной стабилизации означает, что характеристические полиномы

$$\det\left(\lambda \boldsymbol{I}_n - \boldsymbol{A}_i + \mathbf{b}_i \left(\beta^{(i)} - \alpha^{(i)} \right)^{\mathrm{T}} \mathcal{T}_{A_i}^{-1} \right) = \lambda^n + \beta_{n-1}^{(i)} \lambda^{n-1} + \cdots + \beta_1^{(i)} \lambda + \beta_0^{(i)}$$

($i = 1, 2$) с векторами коэффициентов (29) — гурвицевы.

Хорошо известно, что необходимым условием гурвицевости любого полинома является положительность его коэффициентов. Таким образом, необходимое условие гурвицевости характеристических полиномов с векторами коэффициентов (29) имеет вид

$$\beta^{(i)} = \begin{pmatrix} \beta_0^{(i)} \\ \hdashline \beta_1^{(i)} \\ \hdashline \vdots \\ \hdashline \beta_{n-2}^{(i)} \\ \hdashline \beta_{n-1}^{(i)} \end{pmatrix} > 0, \quad i = 1, 2 ,$$

откуда, согласно формуле (26), следует линейное матричное неравенство (31).

Для SIMO-систем второго порядка (например, *математических маятников*) необходимое условие, приведенное в теореме 1, является и достаточным. При этом линейное матричное неравенство (31), условие выбора параметров и искомый регулятор имеют, соответственно, вид

$$\begin{pmatrix} \Upsilon_1^{(1)\mathrm{T}} \\ \hdashline \Upsilon_2^{(1)\mathrm{T}} \\ \hdashline \Upsilon_1^{(2)\mathrm{T}} \\ \hdashline \Upsilon_2^{(2)\mathrm{T}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \hdashline \varphi_2 \end{pmatrix} + 0,5 \left(\begin{array}{c:c} \left(\begin{array}{c:c} 1 & 0 \\ \hdashline 0 & 1 \end{array} \right) & -\begin{pmatrix} \Upsilon_1^{(1)\mathrm{T}} \\ \hdashline \Upsilon_2^{(1)\mathrm{T}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Upsilon_1^{(2)\mathrm{T}} \\ \hdashline \Upsilon_2^{(2)\mathrm{T}} \end{pmatrix}^{-1} \\ \hdashline -\begin{pmatrix} \Upsilon_1^{(2)\mathrm{T}} \\ \hdashline \Upsilon_2^{(2)\mathrm{T}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Upsilon_1^{(1)\mathrm{T}} \\ \hdashline \Upsilon_2^{(1)\mathrm{T}} \end{pmatrix}^{-1} & \left(\begin{array}{c:c} 1 & 0 \\ \hdashline 0 & 1 \end{array} \right) \end{array} \right) \begin{pmatrix} \alpha_0^{(1)} \\ \hdashline \alpha_1^{(1)} \\ \hdashline \alpha_0^{(2)} \\ \hdashline \alpha_1^{(2)} \end{pmatrix} > 0 , (32)$$

$$\begin{pmatrix} \beta_0^{(1)} \\ \hdashline \beta_1^{(1)} \end{pmatrix} \ge \begin{pmatrix} \Upsilon_1^{(1)\mathrm{T}} \\ \hdashline \Upsilon_2^{(1)\mathrm{T}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \hdashline \varphi_2 \end{pmatrix} + 0,5 \left[\begin{pmatrix} \alpha_0^{(1)} \\ \hdashline \alpha_1^{(1)} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \Upsilon_1^{(1)\mathrm{T}} \\ \hdashline \Upsilon_2^{(1)\mathrm{T}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Upsilon_1^{(2)\mathrm{T}} \\ \hdashline \Upsilon_2^{(2)\mathrm{T}} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \alpha_0^{(2)} \\ \hdashline \alpha_1^{(2)} \end{pmatrix} \right], \qquad (33)$$

$$\begin{pmatrix} k_1 \\ \hdashline k_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Upsilon_1^{(1)\mathrm{T}} \\ \hdashline \Upsilon_2^{(1)\mathrm{T}} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \beta_0^{(1)} - \alpha_0^{(1)} \\ \hdashline \beta_1^{(1)} - \alpha_1^{(1)} \end{pmatrix} . \qquad (34)$$

Обратимся к неравенству (31) и подставим в него вместо вектора φ следующий вектор:

$$\left(\mathcal{T}_{A_1}^{-\mathrm{T}} \;\vdots\; \mathcal{T}_{A_2}^{-\mathrm{T}}\right)\left[0,5\begin{pmatrix}\alpha^{(1)}\\ \hdashline \alpha^{(2)}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\psi^{(1)}\\ \hdashline \psi^{(2)}\end{pmatrix}\right]. \tag{35}$$

В результате получим цепочку эквивалентных линейных матричных неравенств

$$\begin{pmatrix}\mathcal{T}_{A_1}^{\mathrm{T}}\\ \hdashline \mathcal{T}_{A_2}^{\mathrm{T}}\end{pmatrix}\left(\mathcal{T}_{A_1}^{-\mathrm{T}} \;\vdots\; \mathcal{T}_{A_2}^{-\mathrm{T}}\right)\left[0,5\begin{pmatrix}\alpha^{(1)}\\ \hdashline \alpha^{(2)}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\psi^{(1)}\\ \hdashline \psi^{(2)}\end{pmatrix}\right]+0,5\left(\begin{array}{c:c}\boldsymbol{I}_n & -\mathcal{T}_{A_1}^{\mathrm{T}}\mathcal{T}_{A_2}^{-\mathrm{T}}\\ \hdashline -\mathcal{T}_{A_2}^{\mathrm{T}}\mathcal{T}_{A_1}^{-\mathrm{T}} & \boldsymbol{I}_n\end{array}\right)\begin{pmatrix}\alpha^{(1)}\\ \hdashline \alpha^{(2)}\end{pmatrix}>0,$$

$$\begin{pmatrix}\mathcal{T}_{A_1}^{\mathrm{T}}\\ \hdashline \mathcal{T}_{A_2}^{\mathrm{T}}\end{pmatrix}\left(\mathcal{T}_{A_1}^{-\mathrm{T}} \;\vdots\; \mathcal{T}_{A_2}^{-\mathrm{T}}\right)\begin{pmatrix}\psi^{(1)}\\ \hdashline \psi^{(2)}\end{pmatrix}+\left(\begin{array}{c:c}\boldsymbol{I}_n & 0\\ \hdashline 0 & \boldsymbol{I}_n\end{array}\right)\begin{pmatrix}\alpha^{(1)}\\ \hdashline \alpha^{(2)}\end{pmatrix}>0,$$

$$\left(\begin{array}{c:c}\boldsymbol{I}_n & \mathcal{T}_{A_1}^{\mathrm{T}}\mathcal{T}_{A_2}^{-\mathrm{T}}\\ \hdashline \mathcal{T}_{A_2}^{\mathrm{T}}\mathcal{T}_{A_1}^{-\mathrm{T}} & \boldsymbol{I}_n\end{array}\right)\begin{pmatrix}\psi^{(1)}\\ \hdashline \psi^{(2)}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\alpha^{(1)}\\ \hdashline \alpha^{(2)}\end{pmatrix}>0. \tag{36}$$

Формула (36) позволяет сформулировать лемму 1 в другом виде.

Лемма 2. *Для одновременной стабилизации линейных SIMO-систем*

$$\dot{\mathbf{x}}_1(t)=\mathbf{A}_1\mathbf{x}_1(t)+\mathbf{b}_1u_1(t),$$

$$\dot{\mathbf{x}}_2(t)=\mathbf{A}_2\mathbf{x}_2(t)+\mathbf{b}_2u_2(t),$$

регулятором $\mathbf{k}\in\mathbb{R}^n$ *в законах управления*

$$u_1(t)=-\mathbf{k}^{\mathrm{T}}\mathbf{x}_1(t),$$
$$u_2(t)=-\mathbf{k}^{\mathrm{T}}\mathbf{x}_2(t),$$

необходимо существование решения $\psi=\left(\psi^{(1)\mathrm{T}} \;\vdots\; \psi^{(2)\mathrm{T}}\right)^{\mathrm{T}}\in\mathrm{P}^{2\nu}$ *линейного матричного неравенства*

$$\mathfrak{M}\begin{pmatrix}\psi^{(1)}\\ \hdashline \psi^{(2)}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\alpha^{(1)}\\ \hdashline \alpha^{(2)}\end{pmatrix}>0, \tag{37}$$

где

$$\mathfrak{M}=\left(\begin{array}{c:c}\boldsymbol{I}_n & \mathcal{T}_{A_1}^{\mathrm{T}}\mathcal{T}_{A_2}^{-\mathrm{T}}\\ \hdashline \mathcal{T}_{A_2}^{\mathrm{T}}\mathcal{T}_{A_1}^{-\mathrm{T}} & \boldsymbol{I}_n\end{array}\right). \tag{38}$$

Анализ матрицы (38) показывает, что она вырождена (см. (31), (35)) и имеет следующее множество собственных чисел:

$$\operatorname{eig}\mathfrak{M} = \{\underbrace{0,\ldots,0}_{n},\underbrace{2,\ldots,2}_{n}\}, \tag{39}$$

т. е. имеет n нулей и n двоек*.

Для рассматривавшегося ранее случая одновременной стабилизации маятников линейное матричное неравенство (32) заменяется следующим:

$$\left(\begin{array}{c|c} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \hline 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \Upsilon_1^{(1)\mathrm{T}} \\ \hline \Upsilon_2^{(1)\mathrm{T}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \Upsilon_1^{(2)\mathrm{T}} \\ \hline \Upsilon_2^{(2)\mathrm{T}} \end{pmatrix}^{-1} \\ \hline \begin{pmatrix} \Upsilon_1^{(2)\mathrm{T}} \\ \hline \Upsilon_2^{(2)\mathrm{T}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \Upsilon_1^{(1)\mathrm{T}} \\ \hline \Upsilon_2^{(1)\mathrm{T}} \end{pmatrix}^{-1} & \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \hline 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}\right)\begin{pmatrix} \psi_1^{(1)} \\ \hline \psi_2^{(1)} \\ \hline \psi_1^{(2)} \\ \hline \psi_2^{(2)} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha_0^{(1)} \\ \hline \alpha_1^{(1)} \\ \hline \alpha_0^{(2)} \\ \hline \alpha_1^{(2)} \end{pmatrix} > 0\,. \tag{40}$$

Здесь неизвестным считается 4-мерный вектор $\psi = \left(\psi^{(1)\mathrm{T}} \;\vdots\; \psi^{(2)\mathrm{T}}\right)^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^4$.

Распространение полученных соотношений по индукции на случай количества SIMO-систем $i = 2, 3, \ldots, m$ дает утверждение.

Теорема 1. *Для одновременной стабилизации линейных SIMO-систем*

$$\dot{\mathbf{x}}_1(t) = \mathbf{A}_1\mathbf{x}_1(t) + \mathbf{b}_1 u_1(t), \ldots,$$

$$\dot{\mathbf{x}}_m(t) = \mathbf{A}_m\mathbf{x}_m(t) + \mathbf{b}_m u_m(t),$$

регулятором $\mathbf{k} \in \mathbb{R}^n$ *в законах управления*

$$u_1(t) = -\mathbf{k}^{\mathrm{T}}\mathbf{x}_1(t), \ldots,$$

$$u_m(t) = -\mathbf{k}^{\mathrm{T}}\mathbf{x}_m(t),$$

необходимо существование решения $\psi \in \mathbb{R}^{mn}$ *линейного матричного неравенства*

$$\mathfrak{M}\begin{pmatrix} \psi^{(1)} \\ \hline \vdots \\ \hline \psi^{(m)} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha^{(1)} \\ \hline \vdots \\ \hline \alpha^{(m)} \end{pmatrix} > 0, \tag{41}$$

* Положительных чисел!

где

$$\mathfrak{M} = \left(\begin{array}{c:c:c:c:c} \boldsymbol{I}_n & \mathcal{T}_{A_1}^{\mathrm{T}}\mathcal{T}_{A_2}^{-\mathrm{T}} & \cdots & \mathcal{T}_{A_1}^{\mathrm{T}}\mathcal{T}_{A_{m-1}}^{-\mathrm{T}} & \mathcal{T}_{A_1}^{\mathrm{T}}\mathcal{T}_{A_m}^{-\mathrm{T}} \\ \hdashline \mathcal{T}_{A_2}^{\mathrm{T}}\mathcal{T}_{A_1}^{-\mathrm{T}} & \boldsymbol{I}_n & \cdots & \mathcal{T}_{A_2}^{\mathrm{T}}\mathcal{T}_{A_{m-1}}^{-\mathrm{T}} & \mathcal{T}_{A_2}^{\mathrm{T}}\mathcal{T}_{A_m}^{-\mathrm{T}} \\ \hdashline \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \hdashline \mathcal{T}_{A_{m-1}}^{\mathrm{T}}\mathcal{T}_{A_1}^{-\mathrm{T}} & \mathcal{T}_{A_{m-1}}^{\mathrm{T}}\mathcal{T}_{A_2}^{-\mathrm{T}} & \cdots & \boldsymbol{I}_n & \mathcal{T}_{A_{m-1}}^{\mathrm{T}}\mathcal{T}_{A_m}^{-\mathrm{T}} \\ \hdashline \mathcal{T}_{A_m}^{\mathrm{T}}\mathcal{T}_{A_1}^{-\mathrm{T}} & \mathcal{T}_{A_m}^{\mathrm{T}}\mathcal{T}_{A_2}^{-\mathrm{T}} & \cdots & \mathcal{T}_{A_m}^{\mathrm{T}}\mathcal{T}_{A_{m-1}}^{-\mathrm{T}} & \boldsymbol{I}_n \end{array}\right). \qquad (42)$$

Матрица (42) обладает следующими *свойствами*:

1. Размеры матрицы $\mathfrak{M}$ равны $mn \times mn$, т. е.

$$\mathfrak{M} \in \mathbb{R}^{mn \times mn}.$$

2. Ранг матрицы $\mathfrak{M}$ равен размерности пространства состояний *n*, т. е.

$$\operatorname{rank} \mathfrak{M} = n.$$

3. Матрица $\mathfrak{M}$ имеет ровно n собственных значений равных *n* и $n(m-1)$ собственных значений равных 0, т. е.

$$\operatorname{eig} \mathfrak{M} = \left\{ \underbrace{0 \ldots 0}_{n(m-1)}, \ \underbrace{m \ldots m}_{n} \right\}.$$

4. Максимальный ранг левого делителя нуля матрицы $\mathfrak{M}$ равен $n(m-1)$, т. е.

$$\operatorname{rank} \mathfrak{M}_L^{\perp} = n(m-1).$$

К сказанному необходимо добавить, что, следуя *альтернативе Фредгольма*, нетрудно показать, что разрешимость (совместность) линейного матричного неравенства (41) эквивалентна разрешимости (совместности) линейного матричного уравнения

$$\mathfrak{M}_L^{\perp} X = 0 \qquad (43)$$

и линейного матричного неравенства

$$X > -\left(\begin{array}{c} \alpha^{(1)} \\ \hdashline \vdots \\ \hdashline \alpha^{(m)} \end{array}\right). \qquad (44)$$

Таким образом, теорема 1 принимает следующий вид.

Теорема 2. *Для одновременной стабилизации линейных SIMO-систем*

$$\dot{\mathbf{x}}_1(t) = \mathbf{A}_1\mathbf{x}_1(t) + \mathbf{b}_1 u_1(t), \ldots,$$

$$\dot{\mathbf{x}}_m(t) = \mathbf{A}_m\mathbf{x}_m(t) + \mathbf{b}_m u_m(t),$$

регулятором $\mathbf{k} \in \mathbb{R}^n$ *в законах управления*

$$u_1(t) = -\mathbf{k}^{\mathrm{T}}\mathbf{x}_1(t), \ldots,$$

$$u_m(t) = -\mathbf{k}^{\mathrm{T}}\mathbf{x}_m(t),$$

необходимо либо существование решения $\psi \in \mathbb{R}^{mn}$ *линейного матричного неравенства*

$$\mathfrak{M}\begin{pmatrix} \psi^{(1)} \\ \hline \vdots \\ \hline \psi^{(m)} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha^{(1)} \\ \hline \vdots \\ \hline \alpha^{(m)} \end{pmatrix} > 0,$$

где

$$\mathfrak{M} = \left(\begin{array}{c:c:c:c:c} \boldsymbol{I}_n & \mathcal{T}_{A_1}^{\mathrm{T}}\mathcal{T}_{A_2}^{-\mathrm{T}} & \cdots & \mathcal{T}_{A_1}^{\mathrm{T}}\mathcal{T}_{A_{m-1}}^{-\mathrm{T}} & \mathcal{T}_{A_1}^{\mathrm{T}}\mathcal{T}_{A_m}^{-\mathrm{T}} \\ \hdashline \mathcal{T}_{A_2}^{\mathrm{T}}\mathcal{T}_{A_1}^{-\mathrm{T}} & \boldsymbol{I}_n & \cdots & \mathcal{T}_{A_2}^{\mathrm{T}}\mathcal{T}_{A_{m-1}}^{-\mathrm{T}} & \mathcal{T}_{A_2}^{\mathrm{T}}\mathcal{T}_{A_m}^{-\mathrm{T}} \\ \hdashline \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \hdashline \mathcal{T}_{A_{m-1}}^{\mathrm{T}}\mathcal{T}_{A_1}^{-\mathrm{T}} & \mathcal{T}_{A_{m-1}}^{\mathrm{T}}\mathcal{T}_{A_2}^{-\mathrm{T}} & \cdots & \boldsymbol{I}_n & \mathcal{T}_{A_{m-1}}^{\mathrm{T}}\mathcal{T}_{A_m}^{-\mathrm{T}} \\ \hdashline \mathcal{T}_{A_m}^{\mathrm{T}}\mathcal{T}_{A_1}^{-\mathrm{T}} & \mathcal{T}_{A_m}^{\mathrm{T}}\mathcal{T}_{A_2}^{-\mathrm{T}} & \cdots & \mathcal{T}_{A_m}^{\mathrm{T}}\mathcal{T}_{A_{m-1}}^{-\mathrm{T}} & \boldsymbol{I}_n \end{array}\right),$$

либо существование решения линейного матричного уравнения

$$\mathfrak{M}_L^{\perp} X = 0,$$

где

$$X > -\left(\alpha^{(1)\mathrm{T}} \;\vdots\; \cdots \;\vdots\; \alpha^{(m)\mathrm{T}}\right).$$

Рассмотрим **пример**.

Пусть заданы существенно неустойчивые SIMO-системы

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_{1,1} \\ \hline \dot{x}_{1,2} \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{c:c} 3,2534 & -8,8362 \\ \hdashline 2,1089 & 11,8482 \end{array}\right)\begin{pmatrix} x_{1,1} \\ \hline x_{1,2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1,458 \\ \hline 0,04747 \end{pmatrix} u_1, \tag{45}$$

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_{2,1} \\ \hline \dot{x}_{2,2} \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{c:c} 0,1725 & -0,2053 \\ \hdashline 0,2047 & 0,2595 \end{array}\right)\begin{pmatrix} x_{2,1} \\ \hline x_{2,2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1,746 \\ \hline 0,1554 \end{pmatrix} u_2, \tag{46}$$

и требуется найти регулятор

$$\mathbf{k}^{\mathrm{T}} = \left(k_1 \mid k_2 \right), \tag{47}$$

такой, чтобы замкнутые SIMO-системы

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_{1,1} \\ \hline \dot{x}_{1,2} \end{pmatrix} = \left[\left(\begin{array}{c|c} -21,82 & -353,7 \\ \hline 1,293 & 0,6204 \end{array} \right) - \begin{pmatrix} 1,458 \\ \hline 0,04747 \end{pmatrix} \left(k_1 \mid k_2 \right) \right] \begin{pmatrix} x_{1,1} \\ \hline x_{1,2} \end{pmatrix}, \tag{48}$$

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_{2,1} \\ \hline \dot{x}_{2,2} \end{pmatrix} = \left[\left(\begin{array}{c|c} -29,85 & -413,2 \\ \hline -2,467 & -36,49 \end{array} \right) - \begin{pmatrix} 1,746 \\ \hline 0,1554 \end{pmatrix} \left(k_1 \mid k_2 \right) \right] \begin{pmatrix} x_{2,1} \\ \hline x_{2,2} \end{pmatrix}, \tag{49}$$

были одновременно стабилизируемы.

Составляя ленточные матрицы управляемости (6) для систем (45), (46) и вычисляя их правые делители нуля (8), получим матрицы $\mathcal{T}_{A_i}$ из (13):

$$\mathcal{T}_{A_1} = \left(\begin{array}{c|c} -17,6938 & 1,4580 \\ \hline 2,9203 & 0,0475 \end{array} \right), \quad \mathcal{T}_{A_2} = \left(\begin{array}{c|c} -0,4851 & 1,7463 \\ \hline 0,3306 & 0,1554 \end{array} \right). \tag{50}$$

Используя (50), вычислим коэффициенты характеристических полиномов систем (45), (46) и составим соответствующие векторы коэффициентов (7). Получим

$$\alpha^{(1)} = \begin{pmatrix} \alpha_0^{(1)} \\ \hline \alpha_1^{(1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 57,1855 \\ \hline -15,1015 \end{pmatrix}, \quad \alpha^{(2)} = \begin{pmatrix} \alpha_0^{(2)} \\ \hline \alpha_1^{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,0868 \\ \hline -0,4320 \end{pmatrix}. \tag{51}$$

Как видно из (51), SIMO-системы (45), (46) действительно являются неустойчивыми, а их коэффициенты характеристических полиномов отличаются более чем на 3 порядка.

На основе матриц (50) составим матрицу (38) линейного матричного неравенства (37)

$$\mathfrak{M} = \left(\begin{array}{c|c|c|c} 1 & 0 & 12,0240 & -6,7919 \\ \hline 0 & 1 & -0,2201 & 0,7738 \\ \hline 0,0991 & 0,8697 & 1 & 0 \\ \hline 0,0282 & 1,5397 & 0 & 1 \end{array} \right). \tag{52}$$

Таким образом, рассматриваемая задача окажется разрешимой, если разрешимо (совместно) линейное матричное неравенство

$$\left(\begin{array}{cc:cc} 1 & 0 & 12,0240 & -6,7919 \\ \hdashline 0 & 1 & -0,2201 & 0,7738 \\ \hdashline 0,0991 & 0,8697 & 1 & 0 \\ \hdashline 0,0282 & 1,5397 & 0 & 1 \end{array}\right)\left(\begin{array}{c} \psi_1^{(1)} \\ \hdashline \psi_2^{(1)} \\ \hdashline \psi_1^{(2)} \\ \hdashline \psi_2^{(2)} \end{array}\right)+\left(\begin{array}{c} 57,1855 \\ \hdashline -15,1015 \\ \hdashline 0,0868 \\ \hdashline -0,4320 \end{array}\right)>0 . \quad (53)$$

Для решения (53) воспользуемся альтернативой Фредгольма и техникой делителей нуля. Для этого найдем *положительный* правый делитель левого делителя нуля матрицы (52). Последовательно получим:

$$\mathfrak{M}_L^{\perp}=\left(\begin{array}{c:c:c:c} 0,0701 & 0,7209 & -0,6846 & -0,0815 \\ \hdashline -0,0398 & 0,4868 & 0,5856 & -0,6469 \end{array}\right),$$

$$X_{>0}=\left(\mathfrak{M}_L^{\perp}\right)_R^{\perp}=\left(\begin{array}{c} 0,9661 \\ \hdashline 0,0907 \\ \hdashline 0,1747 \\ \hdashline 0,1669 \end{array}\right). \quad (54)$$

При этом, при некотором $\boldsymbol{r}>0$, выполняется неравенство

$$\left(\begin{array}{c} \psi_1^{(1)} \\ \hdashline \psi_2^{(1)} \\ \hdashline \psi_1^{(2)} \\ \hdashline \psi_2^{(2)} \end{array}\right)=\boldsymbol{r}X_{>0}=\boldsymbol{r}\left(\begin{array}{c} 0,9661 \\ \hdashline 0,0907 \\ \hdashline 0,1747 \\ \hdashline 0,1669 \end{array}\right)>\left(\begin{array}{c} \alpha_0^{(1)} \\ \hdashline \alpha_1^{(1)} \\ \hdashline \alpha_0^{(2)} \\ \hdashline \alpha_1^{(2)} \end{array}\right)=\left(\begin{array}{c} 57,1855 \\ \hdashline -15,1015 \\ \hdashline 0,0868 \\ \hdashline -0,4320 \end{array}\right).$$

Пусть, например, $\boldsymbol{r}=200$, тогда

$$\left(\begin{array}{c} \psi_1^{(1)} \\ \hdashline \psi_2^{(1)} \\ \hdashline \psi_1^{(2)} \\ \hdashline \psi_2^{(2)} \end{array}\right)=\left(\begin{array}{c} 193,2243 \\ \hdashline 18,1488 \\ \hdashline 34,9305 \\ \hdashline 33,3893 \end{array}\right)>\left(\begin{array}{c} 57,1855 \\ \hdashline -15,1015 \\ \hdashline 0,0868 \\ \hdashline -0,4320 \end{array}\right),$$

при этом будем иметь

$$\left(\begin{array}{c} \varphi_1 \\ \hdashline \varphi_2 \end{array}\right)=\left(\mathcal{T}_{A_1}^{-\mathrm{T}} \;\vdots\; \mathcal{T}_{A_2}^{-\mathrm{T}}\right)\left[0,5\left(\begin{array}{c} \alpha^{(1)} \\ \hdashline \alpha^{(2)} \end{array}\right)+\left(\begin{array}{c} \psi^{(1)} \\ \hdashline \psi^{(2)} \end{array}\right)\right]=\left(\begin{array}{c} 12,4834 \\ \hdashline 218,4413 \end{array}\right),$$

$$\left(\begin{array}{c} \beta_0^{(1)} \\ \hdashline \beta_1^{(1)} \end{array}\right)=\left(\begin{array}{c} \Upsilon_1^{(1)\mathrm{T}} \\ \hdashline \Upsilon_2^{(1)\mathrm{T}} \end{array}\right)\left(\begin{array}{c} \varphi_1 \\ \hdashline \varphi_2 \end{array}\right)+0,5\left[\left(\begin{array}{c} \alpha_0^{(1)} \\ \hdashline \alpha_1^{(1)} \end{array}\right)-\left(\begin{array}{c} \Upsilon_1^{(1)\mathrm{T}} \\ \hdashline \Upsilon_2^{(1)\mathrm{T}} \end{array}\right)\left(\begin{array}{c} \Upsilon_1^{(2)\mathrm{T}} \\ \hdashline \Upsilon_2^{(2)\mathrm{T}} \end{array}\right)^{-1}\left(\begin{array}{c} \alpha_0^{(2)} \\ \hdashline \alpha_1^{(2)} \end{array}\right)\right]=\left(\begin{array}{c} 443,6342 \\ \hdashline 21,1960 \end{array}\right),$$

$$\begin{pmatrix} \beta_0^{(2)} \\ \hdashline \beta_1^{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Upsilon_1^{(2)\mathrm{T}} \\ \hdashline \Upsilon_2^{(2)\mathrm{T}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \hdashline \varphi_2 \end{pmatrix} + 0,5 \left[\begin{pmatrix} \alpha_0^{(2)} \\ \hdashline \alpha_1^{(2)} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \Upsilon_1^{(2)\mathrm{T}} \\ \hdashline \Upsilon_2^{(2)\mathrm{T}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Upsilon_1^{(1)\mathrm{T}} \\ \hdashline \Upsilon_2^{(1)\mathrm{T}} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \alpha_0^{(1)} \\ \hdashline \alpha_1^{(1)} \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} 69,9497 \\ \hdashline 66,3466 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} k_1 \\ \hdashline k_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Upsilon_1^{(1)\mathrm{T}} \\ \hdashline \Upsilon_2^{(1)\mathrm{T}} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \beta_0^{(1)} - \alpha_0^{(1)} \\ \hdashline \beta_1^{(1)} - \alpha_1^{(1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17,1950 \\ \hdashline 236,5167 \end{pmatrix}. \qquad (55)$$

Импульсные переходные характеристики замкнутых SIMO-систем (48), (49) с регулятором (47), (55)

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_{1,1} \\ \hdashline \dot{x}_{1,2} \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{c:c} -21,82 & -353,7 \\ \hdashline 1,293 & 0,6204 \end{array}\right) \begin{pmatrix} x_{1,1} \\ \hdashline x_{1,2} \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_{2,1} \\ \hdashline \dot{x}_{2,2} \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{c:c} -29,85 & -413,2 \\ \hdashline -2,467 & -36,49 \end{array}\right) \begin{pmatrix} x_{2,1} \\ \hdashline x_{2,2} \end{pmatrix}$$

представлены на рис. 2.

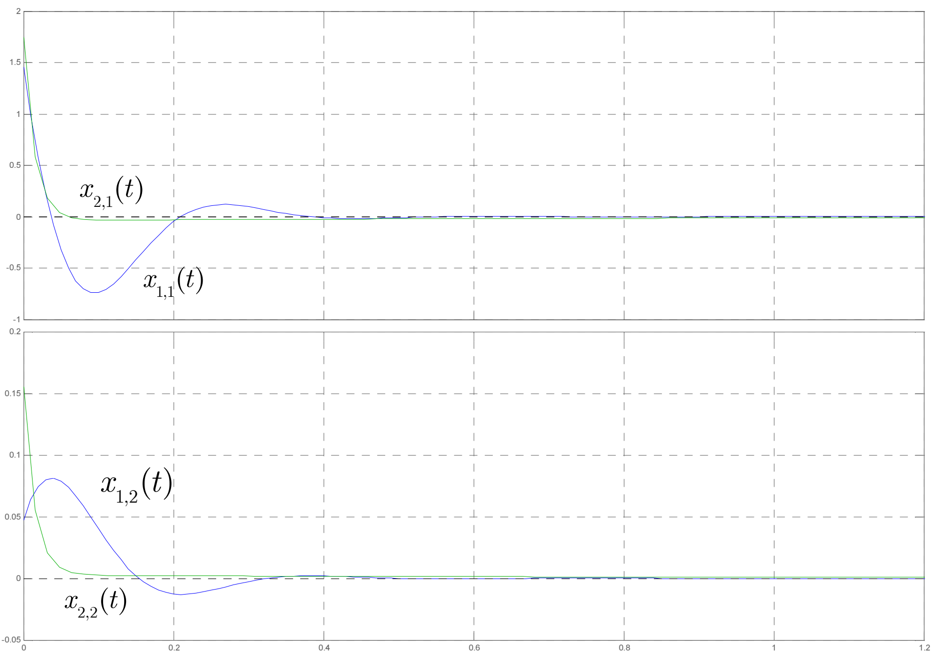

Рис. 2. Переходные импульсные характеристики одновременно стабилизируемых систем

На основе ранее найденного делителя нуля (54) можно синтезировать множество других стабилизирующих регуляторов. Так, при $\boldsymbol{r} = 170$ получим

$$\begin{pmatrix} k_1 \\ \hdashline k_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14,6157 \\ \hdashline 201,0392 \end{pmatrix},$$

при $\boldsymbol{r} = 180$ —

$$\begin{pmatrix} k_1 \\ \hdashline k_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15,4755 \\ \hdashline 212,8650 \end{pmatrix},$$

при $\boldsymbol{r} = 190$ —

$$\begin{pmatrix} k_1 \\ \hdashline k_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16,3352 \\ \hdashline 224,6909 \end{pmatrix} \text{ и т. д.}$$

Общий характер изменения параметров стабилизирующего регулятора приведен на рис. 3.

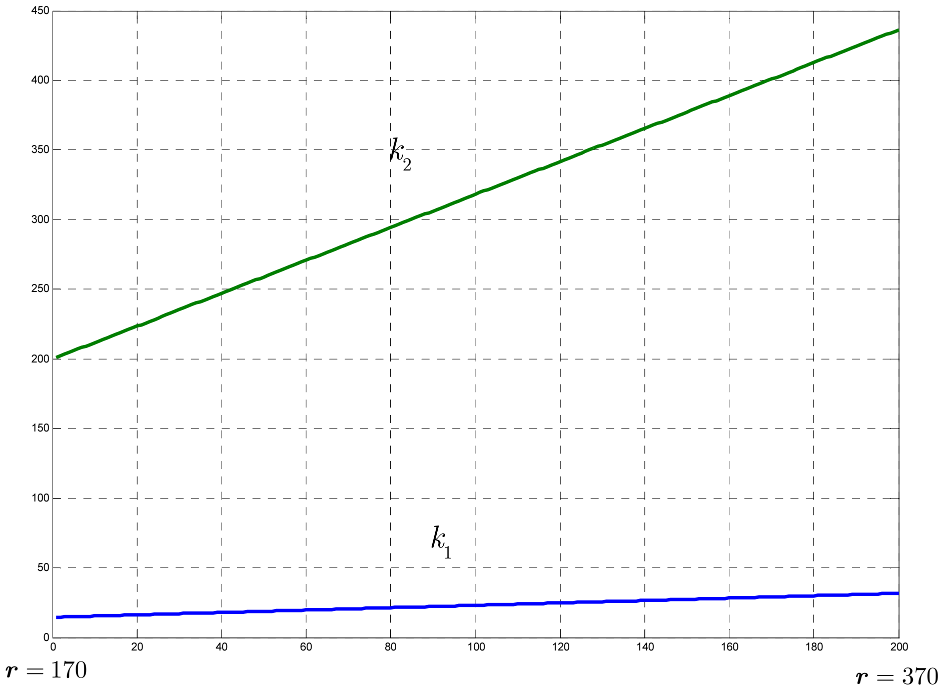

Рис. 3. Характер изменения параметров стабилизирующего регулятора

Пусть заданы неустойчивые SIMO-системы с существенно различающимися параметрами:

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_{1,1} \\ \hdashline \dot{x}_{1,2} \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{c:c} -18,2819 & -18,3883 \\ \hdashline 20,1613 & 19,8908 \end{array}\right) \begin{pmatrix} x_{1,1} \\ \hdashline x_{1,2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0,1472 \\ \hdashline 2,2957 \end{pmatrix} u_1,$$

$$\left(\begin{array}{c}\dot{x}_{2,1}\\ \hline \dot{x}_{2,2}\end{array}\right)=\left(\begin{array}{c|c}-0.0702 & -0.2063\\ \hline 0.1285 & 0.1302\end{array}\right)\left(\begin{array}{c}x_{2,1}\\ \hline x_{2,2}\end{array}\right)+\left(\begin{array}{c}2.7526\\ \hline 0.1383\end{array}\right)u_2 .$$

Как и прежде, требуется найти регулятор вида (47), чтобы замкнутые системы были устойчивыми.

Сначала получим матрицы $\mathcal{T}_{A_i}$

$$\mathcal{T}_{A_1}=\left(\begin{array}{c|c}-45,1411 & 0,1472\\ \hline 44,9366 & 2,2957\end{array}\right),\quad \mathcal{T}_{A_2}=\left(\begin{array}{c|c}-0,3868 & 2,7526\\ \hline 0,3633 & 0,1383\end{array}\right) \tag{56}$$

и на их основе — векторы коэффициентов

$$\alpha^{(1)}=\left(\begin{array}{c}\alpha_0^{(1)}\\ \hline \alpha_1^{(1)}\end{array}\right)=\left(\begin{array}{c}7,0904\\ \hline -1,6089\end{array}\right),\qquad \alpha^{(2)}=\left(\begin{array}{c}\alpha_0^{(2)}\\ \hline \alpha_1^{(2)}\end{array}\right)=\left(\begin{array}{c}0,0174\\ \hline -0,0600\end{array}\right).$$

На основе матриц (56) составим матрицу линейного матричного неравенства

$$\mathfrak{M}=\left(\begin{array}{c|c|c|c}1 & 0 & 123,3358 & 0,9320\\ \hline 0 & 1 & 5,9787 & 0,8936\\ \hline 0,0085 & -0,0089 & 1 & 0\\ \hline -0,0571 & 1,1786 & 0 & 1\end{array}\right).$$

Ее *положительный* правый делитель левого делителя нуля

$$\mathfrak{M}_L^{\perp}=\left(\begin{array}{c|c|c|c}0,0378 & -0,7358 & -0,2646 & 0,6223\\ \hline 0,0018 & -0,1982 & 0,9643 & 0,1755\end{array}\right),$$

равен

$$X_{>0}=\left(\begin{array}{c}0,8562\\ \hline 0,3578\\ \hline 0,0041\\ \hline 0,3728\end{array}\right).$$

При $\boldsymbol{r}=5$ будем иметь следующий стабилизирующий регулятор:

$$\left(\begin{array}{c}k_1\\ \hline k_2\end{array}\right)=\left(\begin{array}{c}1,2801\\ \hline 1,4764\end{array}\right).$$

Общий характер изменения параметров этого стабилизирующего регулятора приведен на рис. 4.

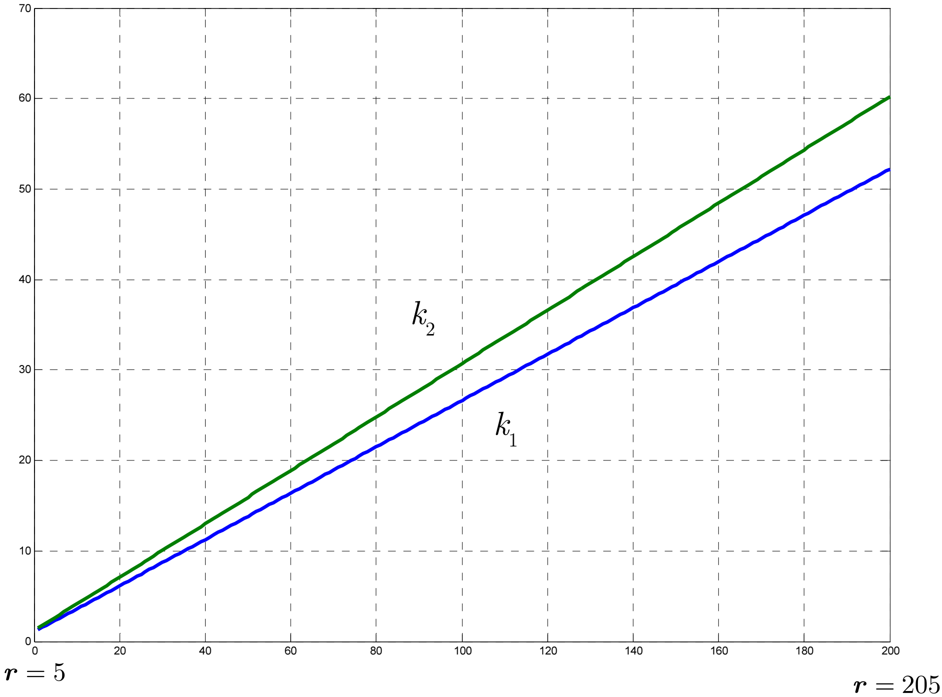

Рис. 4. Характер изменения параметров стабилизирующего регулятора (II)

ЛИТЕРАТУРА

[1] Поляк Б.Т., Щербаков П.С. *Робастная устойчивость и управление*. Москва, Наука, 2002.

[2] Мисриханов М.Ш., Рябченко В.Н. Ленточная формула решения задачи А.Н. Крылова. *Автоматика и Телемеханика*, 2007, № 12, с. 53–69.

[3] Мисриханов М.Ш., Рябченко В.Н. Алгебраические и матричные методы в теории линейных MIMO-систем. *Вестник ИГЭУ*, 2005, вып. 5, с. 196–240.

Статья поступила в редакцию 28.06.2013

Ссылку на эту статью просим оформлять следующим образом:

Мисриханов М.Ш., Рябченко В.Н., Микрин Е.А., Зубов Н.Е. Одновременная стабилизация SIMO-систем. *Инженерный журнал: наука и инновации*, 2013, вып. 10. URL: http://engjournal.ru/catalog/it/nav/1078.html

Мисриханов Мисрихан Шапиевич — д-р техн. наук, ведущий научный сотрудник научно-технического центра ОАО «РКК ”Энергия“ имени С.П. Королёва». Автор более 150 работ в области проблем управления космическими аппаратами.

Рябченко Владимир Николаевич — д-р техн. наук, ведущий научный сотрудник научно-технического центра ОАО «РКК ”Энергия“ имени С.П. Королёва». Автор более 200 работ в области проблем управления космическими аппаратами.

Зубов Николай Евгеньевич — д-р техн. наук, заместитель руководителя по науке научно-технического центра ОАО «РКК ”Энергия“ имени С.П. Королёва», профессор кафедры «Системы автоматического управления» МГТУ им. Н.Э. Баумана. Автор более 70 работ в области проблем управления космическими аппаратами. e-mail: Nikolay.Zubov@rsce.ru

Микрин Евгений Анатольевич — д-р техн. наук, академик РАН, первый заместитель генерального конструктора ОАО «РКК ”Энергия“ имени С.П. Королёва», заведующий кафедрой «Системы автоматического управления» МГТУ им. Н.Э. Баумана. Автор более 100 работ в области проблем управления космическими аппаратами.