УДК 681.51

О неединственности решения задачи терминального управления

© Е.Ю. Зыбин[1], В.Н. Рябченко[1], Н.Е. Зубов[1,2], Е.А. Микрин[1,2]

[1] ОАО «Ракетно-космическая корпорация ”Энергия“ имени С.П. Королёва», г. Королев Московской области, 141070, Россия
[2] МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, 105005, Россия

Рассматривается задача терминального управления линейной нестационарной дискретной динамической системой с векторным управлением. На основе техники делителей нуля приведены условия получения единственного решения задачи терминального управления, построено множество решений и описан подход к получению приближенного решения.

Ключевые слова: *линейные нестационарные дискретные MIMO-системы, терминальное управление, ленточная матрица управляемости.*

Рассмотрим линейную нестационарную дискретную динамическую MIMO-систему (MIMO — Multi Input Multi Output) следующего вида:

$$x_{k+1} = A_k x_k + B_k u_k,\ k = \overline{0, N}, \tag{1}$$

где $x_k \in \mathbb{R}^n$ — вектор состояния; $x_0 = 0$; $u_k \in \mathbb{R}^m$ — вектор управления; $\mathbb{R}$ — множество действительных чисел.

Задача управления системой (1) по переводу ее траектории в состояние

$$x_{N+1} = \tilde{x}, \tag{2}$$

называется *задачей терминального управления*.

Общая задача терминального управления была поставлена в 1948 г. А.А. Фельдбаумом [1]. Получаемое терминальное управление, как правило, представлено программным управлением.

Исследование множества решений задачи терминального управления дискретной системой (1) сводится к анализу системы линейных алгебраических уравнений

$$W_{N+1} u = \tilde{x}, \tag{3}$$

где

$$W_{N+1} = \left(W_{N+1,0} \mid W_{N+1,1} \mid \cdots \mid W_{N+1,N} \right) \in \mathbb{R}^{n \times ((N+1)m)}, \tag{4}$$

$$u = \left(u_0^{\mathrm{T}} \mid u_1^{\mathrm{T}} \mid \cdots \mid u_N^{\mathrm{T}} \right) \in \mathbb{R}^{(N+1)m}, \tag{5}$$

$$W_{N+1,k} = A_N A_{N-1} \cdots A_{k+1} B_k . \tag{6}$$

В [2] приведены результаты исследования задачи терминального управления.

1. Решение задачи терминального управления (1)–(3) существует и единственно при следующих необходимых и достаточных условиях:

$$\tilde{x}^{\mathrm{T}} Z\left(W_{N+1}\right) \tilde{x} = 0, \det\left(W_{N+1}^{\mathrm{T}} W_{N+1}\right) > 0 , \tag{7}$$

где $Z(Y) = I - Y^{+}Y$ — проекционная матрица; Y^{+} — псевдообратная по Муру — Пенроузу матрица. При этом терминальное управление имеет вид

$$u = \left(W_{N+1}^{\mathrm{T}} W_{N+1}\right)^{-1} W_{N+1}^{\mathrm{T}} \tilde{x} = W_{N+1}^{\mathrm{T}} P^{+} \tilde{x} , \tag{8}$$

где

$$P = \sum_{j=0}^{N} W_{N+1,j} W_{N+1,j}^{\mathrm{T}} = W_{N+1} W_{N+1}^{\mathrm{T}} , \tag{9}$$

что в покомпонентном представлении можно записать так:

$$u_k = W_{N+1,k}^{\mathrm{T}} P^{+} \tilde{x},\ k = \overline{0, N} . \tag{10}$$

2. Необходимые и достаточные условия существования неединственного решения задачи терминального управления (1)–(3) имеют вид

$$\tilde{x}^{\mathrm{T}} Z\left(W_{N+1}\right) \tilde{x} = 0, \det\left(W_{N+1}^{\mathrm{T}} W_{N+1}\right) = 0 , \tag{11}$$

при этом множество терминальных управлений следующее:

$$\Omega_u = \left\{ u : u = \left(u_0^{\mathrm{T}} \mid u_1^{\mathrm{T}} \mid \cdots \mid u_N^{\mathrm{T}}\right),\ u_k = W_{N+1,k}^{\mathrm{T}} P^{+} \tilde{x} + \right. \\ \left. + v_k - W_{N+1,k}^{\mathrm{T}} P^{+} \sum_{j=0}^{N} W_{N+1,j} v_j,\ \ \forall v_k \in \mathbb{R}^m,\ k = \overline{0,\ N} \right\}. \tag{12}$$

Здесь v_k — произвольный m-мерный действительный вектор.

3. В случае, когда решения задачи терминального управления (1)–(3) не существует и при этом минимум величины

$$\left\| x_{N+1} - \tilde{x} \right\|^2$$

достигается при единственном выборе управления $\widehat{u}_k$, то необходимые и достаточные условия для этого случая имеют вид

$$\tilde{x}^{\mathrm{T}} Z\left(W_{N+1}\right) \tilde{x} > 0, \det\left(W_{N+1}^{\mathrm{T}} W_{N+1}\right) > 0 . \tag{13}$$

При этом

$$\widehat{u}_k = W_{N+1,k} P^{+} \tilde{x}, k = \overline{0, N} . \tag{14}$$

4. Если решение задачи терминального управления (1)–(3) не существует и при этом минимум величины

$$\left\| x_{N+1} - \tilde{x} \right\|^2$$

достигается при неединственном выборе управлений $\widehat{u}_k$, то необходимые и достаточные условия для этого случая имеют вид

$$\tilde{x}^{\mathrm{T}} Z\left(W_{N+1}\right) \tilde{x} > 0, \det\left(W_{N+1,k}^{\mathrm{T}} W_{N+1}\right) = 0 . \tag{15}$$

При этом множество терминальных управлений следующее:

$$\Omega_u = \left\{ \widehat{u} : \widehat{u} = \begin{bmatrix} \widehat{u}_0^{\mathrm{T}} & \widehat{u}_1^{\mathrm{T}} & \cdots & \widehat{u}_N^{\mathrm{T}} \end{bmatrix}, \ \widehat{u}_k = W_{N+1,k}^{\mathrm{T}} P^{+} \tilde{x} + \right. \\ \left. + v_k - W_{N+1,k}^{\mathrm{T}} P^{+} \sum_{j=0}^{N} W_{N+1,j} v_j, \quad \forall v_k \in \mathbb{R}^m, \ k = \overline{0,\ N} \right\}. \tag{16}$$

Применяя подход к решению линейных матричных уравнений, описанный в [3], получим альтернативные приведенным выше утверждения.

А. Решение задачи терминального управления (1)–(3) существует при следующих необходимых и достаточных условиях:

$$W_{N+1}^{\perp L} \tilde{x} = 0 , \tag{17}$$

где $W_{N+1}^{\perp L}$ — левый делитель нуля (левый аннулятор) максимального ранга матрицы (4), т. е.

$$W_{N+1}^{\perp L} W_{N+1} = 0 . \tag{18}$$

Для определенности в дальнейшем будем считать, что матрица $W_{N+1}^{\perp L}$ удовлетворяет условию ортогональности, т. е.

$$W_{N+1}^{\perp L} \left(W_{N+1}^{\perp L} \right)^{\mathrm{T}} = I . \tag{19}$$

B. При выполнении условий существования решения задачи терминального управления (17), (18) решение этой задачи имеет вид следующего множества:

$$u = W_{N+1}^{+} \tilde{x} + W_{N+1}^{\perp R} \varphi , \tag{20}$$

где W_{N+1}^{+} — псевдообратная по Муру — Пенроузу матрица; $W_{N+1}^{\perp R}$ — правый делитель нуля (правый аннулятор) максимального ранга матрицы (4), т. е.

$$W_{N+1} W_{N+1}^{\perp R} = 0, \qquad (21)$$

φ — произвольный вектор подходящей размерности.

Решение задачи терминального управления имеет единственный вид, если и только если

$$W_{N+1}^{\perp R} = 0. \qquad (22)$$

Из (17) вытекает условие неразрешимости рассматриваемой задачи терминального управления:

$$W_{N+1}^{\perp L} \tilde{x} \neq 0. \qquad (23)$$

Для поиска приближенного решения в данном случае будем использовать следующий подход [4].

Пусть для определенности

$$W_{N+1}^{\perp L} \tilde{x} = \beta, \qquad (24)$$

где β — некоторая ненулевая матрица, полученная в результате произведения матрицы $W_{N+1}^{\perp L}$ и вектора $\tilde{x}$. Обратимся к выражению (24) и рассмотрим его как уравнение относительно вектора $\tilde{x}$. Тем самым, попытаемся выделить семейство «подходящих» правых частей системы (3), т. е. «подходящих» терминальных состояний динамической системы (1). Разрешая (24) относительно вектора $\tilde{x}$, с учетом (19), получим множество векторов, удовлетворяющих (17), [3]

$$\tilde{x} = \left(W_{N+1}^{\perp L}\right)^{\mathrm{T}} \beta + W_{N+1} W_{N+1}^{\perp R} \gamma, \qquad (25)$$

где $W_{N+1}^{\perp R}$ — матрица, удовлетворяющая уравнению

$$W_{N+1}^{\perp L} W_{N+1} W_{N+1}^{\perp R} = I_{\operatorname{rank} W_{N+1}}; \qquad (26)$$

γ — произвольный вектор подходящей размерности.

Воспользовавшись (25), (26) вместо (3), рассмотрим уравнение

$$W_{N+1} u = \tilde{x} - \left(W_{N+1}^{\perp L}\right)^{\mathrm{T}} \beta - W_{N+1} W_{N+1}^{\perp R} \gamma. \qquad (27)$$

Очевидно, что с учетом (24) уравнение (27) оказывается всегда разрешимым, поскольку

$$W_{N+1}^{\perp L} \left(\tilde{x} - \left(W_{N+1}^{\perp L}\right)^{\mathrm{T}} \beta - W_{N+1} W_{N+1}^{\perp R} \gamma \right) = \beta - \beta = 0,$$

а множество его решений имеет аналогичный (20) вид

$$u = W_{N+1}^{+}\left(\tilde{x} - \left(W_{N+1}^{\perp L}\right)^{\mathrm{T}}\beta - W_{N+1}W_{N+1}^{\perp R}\gamma\right) + W_{N+1}^{\perp R}\varphi\,. \tag{28}$$

Минимизируя в том или ином смысле правую часть (28), получим множество приближенных решений [4] рассматриваемой задачи терминального управления. При этом частными случаями (28) являются формулы (13) – (16). Отметим также, что упрощение полученных условий достигается при решении задачи терминального управления стационарной дискретной системой. В этом случае вместо (1) рассматривается дискретная динамическая система

$$x_{k+1} = Ax_k + Bu_k,\ k = \overline{0, N}\,, \tag{29}$$

где, в отличие от (1), матрицы A и B являются постоянными.

Решение задачи терминального управления дискретной системой (29) сводится к решению системы линейных алгебраических уравнений следующего вида:

$$\left(A^N B \;\vdots\; A^{N-1}B \;\vdots\; \cdots \;\vdots\; AB \;\vdots\; B\right)\begin{pmatrix} u_0 \\ \hdashline u_1 \\ \hdashline \vdots \\ \hdashline u_{N-1} \\ \hdashline u_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{x}_1 \\ \hdashline \tilde{x}_2 \\ \hdashline \vdots \\ \hdashline \tilde{x}_{n-1} \\ \hdashline \tilde{x}_n \end{pmatrix}. \tag{30}$$

Условие разрешимости задачи терминального управления (17) применительно к дискретной динамической системе (29) будет иметь вид [3]

$$\left(A^N B \;\vdots\; A^{N-1}B \;\vdots\; \cdots \;\vdots\; AB \;\vdots\; B\right)_L^{\perp}\begin{pmatrix} \tilde{x}_1 \\ \hdashline \tilde{x}_2 \\ \hdashline \vdots \\ \hdashline \tilde{x}_{n-1} \\ \hdashline \tilde{x}_n \end{pmatrix} = 0\,. \tag{31}$$

Если $N \geq n$, тогда условие разрешимости задачи терминального управления (31) сводится к условию полной управляемости дискретной системы (29), т. е.

$$\left(A^N B \;\vdots\; A^{N-1}B \;\vdots\; \cdots \;\vdots\; AB \;\vdots\; B\right)_L^{\perp} = 0, \tag{32}$$

или эквивалентно

$$C_L^{\perp} = 0, \tag{33}$$

где

$$C = \left(\begin{array}{c:c:c:c:c} B_L^{\perp}A & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \hdashline B_L^{\perp} & B_L^{\perp}A & 0 & \cdots & 0 \\ \hdashline 0 & B_L^{\perp} & B_L^{\perp}A & \cdots & 0 \\ \hdashline 0 & 0 & B_L^{\perp} & \ddots & \vdots \\ \hdashline \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & B_L^{\perp}A \\ \hdashline 0 & 0 & 0 & \cdots & B_L^{\perp} \end{array}\right) \in \mathbb{R}^{(n-r+1)(n-r)\times n(n-r)}. \tag{34}$$

При $N < n$ и индексе управляемости дискретной системы (29) $\mu < n$ матрица (34) (ленточная матрица управляемости) имеет размеры

$$C_{\mu} \in \mathbb{R}^{(n-\mu+1)(n-\mu)\times n(n-\mu)}, \tag{35}$$

и для разрешимости задачи терминального управления достаточно выполнения условия

$$\left(C_{\mu}\right)_L^{\perp} = 0. \tag{36}$$

При более жестком условии, когда число шагов $N < \mu$, требование (31) остается в силе.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Фельдбаум А.А. О распределении корней характеристического уравнения. *АиТ*, 1948, № 4, с. 253–279.

[2] Кириченко Н.Ф., Лепеха Н.П. Применение псевдообратных и проекционных матриц к исследованию задач управления, наблюдения и идентификации. *Кибернетика и системный анализ*, 2002, № 4, с. 107–124.

[3] Мисриханов М.Ш., Рябченко В.Н. Алгебраические и матричные методы в теории линейных MIMO-систем. *Вестник ИГЭУ*, 2005, вып. 5, с. 196–240.

[4] Мисриханов М.Ш., Рябченко В.Н., Зыбин Е.Ю. *О приближенных решениях матричных уравнений. Современные методы управления многосвязными динамическими системами.* Красовский А.А., ред. Вып. 2. Москва, Энергоатомиздат, 2003, с. 181–190.

Статья поступила в редакцию 28.06.2013

Ссылку на эту статью просим оформлять следующим образом:

Зыбин Е.Ю., Рябченко В.Н., Зубов Н.Е., Микрин Е.А. О неединственности решения задачи терминального управления. *Инженерный журнал: наука и инновации*, 2013, вып. 10. URL: http://engjournal.ru/catalog/it/nav/1077.html

Зыбин Евгений Юрьевич — канд. техн. наук, научный сотрудник научно-технического центра ОАО «РКК ”Энергия“ имени С.П. Королёва». Автор более 200 работ в области проблем управления.

Рябченко Владимир Николаевич — д-р техн. наук, ведущий научный сотрудник научно-технического центра ОАО «РКК ”Энергия“ имени С.П. Королёва». Автор более 200 работ в области проблем управления.

Зубов Николай Евгеньевич — д-р техн. наук, заместитель руководителя по науке научно-технического центра ОАО «РКК ”Энергия“ имени С.П. Королёва», профессор кафедры «Системы автоматического управления» МГТУ им. Н.Э. Баумана. Автор более 70 работ в области проблем управления космических аппаратов. e-mail: Nikolay.Zubov@rsce.ru

Микрин Евгений Анатольевич — д-р техн. наук, академик РАН, первый заместитель генерального конструктора ОАО «РКК ”Энергия“ имени С.П. Королёва», заведующий кафедрой «Системы автоматического управления» МГТУ им. Н.Э. Баумана. Автор более 100 работ в области проблем управления космических аппаратов.