УДК 681.51

Модель наблюдателя с использованием алгоритма оптимального размещения полюсов и ее применение в задачах управления космическим аппаратом

© Н.Е. Зубов[1,2], Е.А. Микрин[1,2], В.Н. Рябченко[1]

[1] ОАО «Ракетно-космическая корпорация ”Энергия“ имени С.П. Королёва», г. Королев Московской области, 141070, Россия

[2] МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, 105005, Россия

Для многомерной системы построен наблюдатель состояния, в основу которого положен метод оптимального размещения полюсов. Для международной космической станции получено аналитическое решение задачи оценки равновесной ориентации.

Ключевые слова: *многомерная система, оптимальное размещение полюсов, равновесная ориентация, матрица обратной связи наблюдателя.*

Введение. Наблюдающие устройства (*наблюдатели*) относятся к одному из хорошо изученных разделов теории линейных систем в традиционной постановке. В лаконичной форме соответствующие результаты изложены, например, в [1], а в более подробном виде — в [2].

Рассмотрим многомерный динамический объект — MIMO-систему, заданную в пространстве состояний уравнениями

$$\mathfrak{D}\mathbf{x} = \boldsymbol{A}\mathbf{x} + \boldsymbol{B}\mathbf{u}, \quad \mathbf{y} = \boldsymbol{C}\mathbf{x},$$

где $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ — вектор состояния; $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^r$ — вектор входа; $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^m$ — вектор выхода; $\mathbb{R}$ — множество действительных чисел; $\mathfrak{D}$ — символ, обозначающий либо оператор дифференцирования, т. е.

$$\mathfrak{D}\mathbf{x}(t) = \dot{\mathbf{x}}(t),$$

либо оператор сдвига, т. е.

$$\mathfrak{D}\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}(t+1).$$

Считается, что для MIMO-системы существует управление с обратной связью вида

$$\mathbf{u} = \boldsymbol{F}\mathbf{x},$$

где $\boldsymbol{F} \in \mathbb{R}^{r \times n}$ — матрица регулятора по состоянию.

Пусть пара матриц (A, C) — полностью наблюдаемая, т. е. выполняется условие Калмана

$$\operatorname{rank}\begin{pmatrix} \boldsymbol{C} \\ \hdashline \boldsymbol{CA} \\ \hdashline \vdots \\ \hdashline \boldsymbol{CA}^{n-m} \end{pmatrix} = n.$$

Тогда можно построить наблюдатель, позволяющий по входному $\mathbf{u}$ и выходному $\mathbf{y}$ векторам оценивать вектор состояния $\mathbf{x}$ объекта. Если наблюдатель формирует оценку всего вектора $\mathbf{x}$, то говорят о наблюдателе полного ранга; если оценивается только некоторая часть этого вектора, то наблюдатель называют редуцированным.

Наблюдатель полного ранга определяется уравнением

$$\mathfrak{D}\hat{\mathbf{x}} = \left(\boldsymbol{A} - \boldsymbol{LC}\right)\hat{\mathbf{x}} + \boldsymbol{L}\mathbf{y} + \boldsymbol{B}\mathbf{u}, \tag{1}$$

где $\hat{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^n$ — состояние наблюдателя, представляющее собой искомую оценку. Выбором матрицы коэффициентов $\boldsymbol{L}$ при действительных матрицах $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{B}$ всегда можно обеспечить любое заданное размещение на комплексной плоскости корней характеристического полинома

$$\det\left(\lambda \boldsymbol{I}_n - \boldsymbol{A} + \boldsymbol{LC}\right)$$

и, соответственно, собственных значений (полюсов)

$$\operatorname{eig}\left(\boldsymbol{A} - \boldsymbol{LC}\right) = \left\{\lambda_i \in \mathbb{C} : \det\left(\lambda \boldsymbol{I}_n - \boldsymbol{A} + \boldsymbol{LC}\right) = 0\right\}$$

наблюдателя состояния. В этом случае рассматривается вспомогательная система

$$\mathfrak{D}\mu = \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\mu + \boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\eta, \;\; \eta = -\boldsymbol{L}^{\mathrm{T}}\mu, \tag{2}$$

где μ — вектор, имеющий размерность вектора x и полностью управляемый вектором $\boldsymbol{h}$. Поиск матрицы $\boldsymbol{L}$, по сути, и является основной целью решения задачи наблюдения.

1. Синтез наблюдателя. В отличие от [3], где для синтеза наблюдателя использовался метод точного размещения полюсов, здесь рассмотрим применение метода оптимального размещения полюсов [4]. В этом случае также введем многоуровневую декомпозицию системы (2) следующего вида (для простоты продолжая считать, что все матрицы $\boldsymbol{B}_i$ имеют полный ранг по столбцам):

нулевой уровень

$$\boldsymbol{A}_0 = \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}, \; \boldsymbol{B}_0 = (\boldsymbol{C}_p)^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{C}^{\mathrm{T}},$$

первый уровень

$$\boldsymbol{A}_1 = \boldsymbol{B}_0^{\perp} \boldsymbol{A}_0 \boldsymbol{B}_0^{\perp -}, \qquad \boldsymbol{B}_1 = \boldsymbol{B}_0^{\perp} \boldsymbol{A}_0 \boldsymbol{B}_0\,, \tag{3}$$

k-й (*промежуточный*) *уровень*

$$\boldsymbol{A}_k = \boldsymbol{B}_{k-1}^{\perp} \boldsymbol{A}_{k-1} \boldsymbol{B}_{k-1}^{\perp -}, \quad \boldsymbol{B}_k = \boldsymbol{B}_{k-1}^{\perp} \boldsymbol{A}_{k-1} \boldsymbol{B}_{k-1}\,, \tag{4}$$

M-й (*конечный*) *уровень*, $M = \operatorname{ceil}(n/r) - 1$,

$$\boldsymbol{A}_M = \boldsymbol{B}_{M-1}^{\perp} \boldsymbol{A}_{M-1} \boldsymbol{B}_{M-1}^{\perp -}, \quad \boldsymbol{B}_M = \boldsymbol{B}_{M-1}^{\perp} \boldsymbol{A}_{M-1} \boldsymbol{B}_{M-1}\,, \tag{5}$$

где $\boldsymbol{B}_i^{\perp -}$ — *2-полуобратная* матрица для $\boldsymbol{B}_i^{\perp}$, т. е. матрица удовлетворяющая условиям регулярности

$$\boldsymbol{B}_i^{\perp} \boldsymbol{B}_i^{\perp -} \boldsymbol{B}_i^{\perp} = \boldsymbol{B}_i^{\perp},\ \boldsymbol{B}_i^{\perp -} \boldsymbol{B}_i^{\perp} \boldsymbol{B}_i^{\perp -} = \boldsymbol{B}_i^{\perp -}\,. \tag{6}$$

Таким образом, в соответствии с [4] справедлива следующая теорема. Если система (2) полностью управляемая и выполнена многоуровневая декомпозиция (3) – (5), где все матрицы $\boldsymbol{B}_i^{\perp -}$ удовлетворяют условиям регулярности (6), а матрица $\boldsymbol{L}^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^{r \times n}$ удовлетворяет формулам

$$\boldsymbol{L}^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{L}_0^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{B}_0^{-} \boldsymbol{A} - \Phi_0 \boldsymbol{B}_0^{-}, \quad \boldsymbol{B}_0^{-} = \boldsymbol{L}_1^{\mathrm{T}} \boldsymbol{B}_0^{\perp} + \boldsymbol{B}_0^{+}\,,$$

$$\boldsymbol{L}_1^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{B}_1^{-} \boldsymbol{A}_1 - \Phi_1 \boldsymbol{B}_1^{-}, \quad \boldsymbol{B}_1^{-} = \boldsymbol{L}_2^{\mathrm{T}} \boldsymbol{B}_1^{\perp} + \boldsymbol{B}_1^{+}\,,$$

$$\ldots$$

$$\boldsymbol{L}_k^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{B}_k^{-} \boldsymbol{A}_k - \Phi_k \boldsymbol{B}_k^{-}, \quad \boldsymbol{B}_k^{-} = \boldsymbol{L}_{k+1}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{B}_k^{\perp} + \boldsymbol{B}_k^{+}\,,$$

$$\ldots$$

$$\boldsymbol{L}_M^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{B}_M^{+} \boldsymbol{A}_M - \Phi_M \boldsymbol{B}_M^{-}\,,$$

тогда выполняется тождество

$$\operatorname{eig}\left(\boldsymbol{A} - \boldsymbol{B}\boldsymbol{L}^{T}\right) = \bigcup_{i=1}^{L+1} \operatorname{eig}\Phi_{i-1}\,.$$

При добавлении к условиям (6) условия симметричности

$$\left(\boldsymbol{B}_i^{\perp -} \boldsymbol{B}_i^{\perp}\right)^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{B}_i^{\perp -} \boldsymbol{B}_i^{\perp},\ \left(\boldsymbol{B}_i^{\perp} \boldsymbol{B}_i^{\perp -}\right)^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{B}_i^{\perp} \boldsymbol{B}_i^{\perp -}\,,$$

тогда автоматически будет выполняться тождество матриц

$$\boldsymbol{B}_i^{\perp -} = \boldsymbol{B}_i^{\perp +}\,, \tag{7}$$

где $\boldsymbol{B}_i^{\perp +}$ — псевдообратная матрица для $\boldsymbol{B}_i^{\perp}$.

Очевидно, что формулировка теоремы 2 справедлива и при выполнении (7).

Для устранения недостатка, связанного с возможной неполнотой ранга по столбцам матрицы $\boldsymbol{B}_i$ в многоуровневой декомпозиции в [3], предлагается при нарушении на каком-либо уровне декомпозиции (пусть даже и нулевом) полноты ранга по столбцам матрицы $\boldsymbol{B}_i$ выполнить ее «скелетное» разложение по типу

$$\boldsymbol{B}_i = \widehat{\boldsymbol{B}}_i \boldsymbol{T}_i, \tag{8}$$

а затем, «перезапустив» алгоритм *с текущего уровня декомпозиции*, найти регулятор $\widehat{\boldsymbol{K}}_i$ для управляемой пары матриц (A_i, $\acute{B}_i$). Нетрудно доказать, что при этом выполняется условие

$$\operatorname{eig}\left(\boldsymbol{A}_i - \widehat{\boldsymbol{B}}_i \widehat{\boldsymbol{K}}_i\right) = \operatorname{eig}\left(\boldsymbol{A}_i - \boldsymbol{B}_i \boldsymbol{T}_i^{+} \widehat{\boldsymbol{K}}_i\right), \tag{9}$$

где $\boldsymbol{T}_i \boldsymbol{T}_i^{+} = \boldsymbol{I}$.

«Перезапускать» алгоритм необходимо при каждом новом нарушении полноты ранга матриц.

Для применения алгоритма оптимального размещения полюсов [4] с целью синтеза наблюдателя дискретной системы необходимо вычисление матрицы обратной связи нулевого уровня декомпозиции осуществлять в соответствии с полученными в [4] выражениями

$$\boldsymbol{K}_{\text{opt}} = \left(\boldsymbol{K}_1 \boldsymbol{B}^{\perp} + \boldsymbol{B}^{+}\right)\boldsymbol{A} - \Phi_{\text{opt}}\left(\boldsymbol{K}_1 \boldsymbol{B}^{\perp} + \boldsymbol{B}^{+}\right), \tag{10}$$

$$\Phi_{\text{opt}} = \left(\boldsymbol{K}_1 \boldsymbol{B}^{\perp} + \boldsymbol{B}^{+}\right)\boldsymbol{A}\boldsymbol{B} - \alpha \boldsymbol{I}_r,$$

где α — скаляр, обеспечивающий условие нахождения внутри единичного круга всего множества собственных значений $\operatorname{eig}(F_{\text{opt}})$.

Следует отметить, что согласно [4] выражение (10) обеспечивает минимум квадратичного функционала Летова — Калмана

$$J = \frac{1}{2}\int_0^{\infty}\left(\mathbf{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}\mathbf{x} + \mathbf{u}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}\mathbf{u}\right)dt,$$

где $\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{Q} \geq 0$, $\boldsymbol{R}^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{R} > 0$.

2. Применение алгоритма оптимального размещения полюсов при решении задачи идентификации положения равновесной ориентации КА. Суть задачи изложена в [5]. Дискретная модель расширенного вектора состояния КА при решении задачи оценки положения равновесной ориентации в отсутствие управления и автономности канала тангажа относительно взаимосвязанных каналов крена и рысканья имеет вид [5]

$$\begin{pmatrix} \gamma \\ \dot{\gamma} \\ \gamma_0 \\ \psi \\ \dot{\psi} \\ \psi_0 \end{pmatrix}_{n+1} = \left(\begin{array}{c:c:c:c:c:c} 1 & h & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hdashline hK_{11} & 1 & -hK_{11} & 0 & -hK_{12} & 0 \\ \hdashline 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hdashline 0 & 0 & 0 & 1 & h & 0 \\ \hdashline 0 & hK_{21} & 0 & hK_{22} & 1 & -hK_{22} \\ \hdashline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{pmatrix} \gamma \\ \dot{\gamma} \\ \gamma_0 \\ \psi \\ \dot{\psi} \\ \psi_0 \end{pmatrix}_{n}, \qquad (11)$$

$$\begin{pmatrix} \theta \\ \dot{\theta} \\ \theta_0 \end{pmatrix}_{n+1} = \left(\begin{array}{c:c:c} 1 & h & 0 \\ \hdashline K_{33}h & 1 & -K_{33}h \\ \hdashline 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{pmatrix} \theta \\ \dot{\theta} \\ \theta_0 \end{pmatrix}_{n}, \qquad (12)$$

где γ, ψ, θ — углы отклонения связанного базиса КА относительно орбитального в каналах крена, рыскания и тангажа; $\dot{\gamma}$, $\dot{\psi}$, $\dot{\theta}$ — скорости изменения указанных углов; γ_0, ψ_0, θ_0 — медленно меняющиеся углы в каналах крена, рыскания и тангажа, определяющие положение равновесия [5] относительно орбитального базиса; индекс n — номер такта работы дискретной системы; $h = 0{,}2$ с — период квантования (длительность такта вычислений бортовой ЭВМ),

$$K_{11} = 4\omega_0^2 \frac{J_y - J_z}{J_x}; \qquad K_{12} = \omega_0 \frac{J_x + J_y - J_z}{J_x};$$

$$K_{21} = \omega_0 \frac{J_x + J_y - J_z}{J_y}; \qquad K_{22} = \omega_0^2 \frac{J_x - J_z}{J_y};$$

$$K_{33} = 3\omega_0^2 \frac{J_x - J_y}{J_z},$$

где ω_0 — орбитальная скорость КА на круговой орбите; J_x, J_y, J_z — моменты инерции КА относительно связанных осей.

Применим изложенный выше подход к решению задачи оценки положения равновесной ориентации КА.

В соответствии с (2) и на основании (11), (12) имеем

$$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}_{\gamma-\psi} = \left(\begin{array}{c:c:c:c:c:c} 1 & hK_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hdashline h & 1 & 0 & 0 & hK_{21} & 0 \\ \hdashline 0 & -hK_{11} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hdashline 0 & 0 & 0 & 1 & hK_{22} & 0 \\ \hdashline 0 & -hK_{12} & 0 & h & 1 & 0 \\ \hdashline 0 & 0 & 0 & 0 & -hK_{22} & 1 \end{array}\right), \qquad (13)$$

$$\boldsymbol{C}_{\gamma-\psi}^{\mathrm{T}}=\left(\begin{array}{c:c:c:c}1&0&0&0\\ \hdashline 0&1&0&0\\ \hdashline 0&0&0&0\\ \hdashline 0&0&1&0\\ \hdashline 0&0&0&1\\ \hdashline 0&0&0&0\end{array}\right),\ \boldsymbol{A}_{\vartheta}^{\mathrm{T}}=\left(\begin{array}{c:c:c}1&hK_{33}&0\\ \hdashline h&1&0\\ \hdashline 0&-hK_{33}&1\end{array}\right),\ \boldsymbol{C}_{\vartheta}^{\mathrm{T}}=\left(\begin{array}{c:c}1&0\\ \hdashline 0&1\\ \hdashline 0&0\end{array}\right). \quad (13)$$

В данном случае размерность подпространств состояний, описывающих вспомогательную систему (2) — $n_{g-y}=6$, $n_J=3$, векторов управления — $r_{g-y}=4$, $r_J=2$, а число уровней декомпозиции для каждого из каналов

$$M=\operatorname{ceil}(n/r)-1=2-1=1$$

— два (нулевой и первый).

Согласно введенной выше многоуровневой декомпозиции *нулевой уровень* для системы (2) при $\mathfrak{D}\mathbf{x}(t)=\mathbf{x}(t+1)$ и матрицами (13) имеет вид

$$(\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}})_{\gamma-\psi}^{\perp}=\left(\begin{array}{c:c:c:c:c:c}0&0&1&0&0&0\\ \hdashline 0&0&0&0&0&1\end{array}\right),\ (\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}})_{\gamma-\psi}^{+}=\left(\begin{array}{c:c:c:c:c:c}1&0&0&0&0&0\\ \hdashline 0&1&0&0&0&0\\ \hdashline 0&0&0&1&0&0\\ \hdashline 0&0&0&0&1&0\end{array}\right),$$

$$(\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}})_{\vartheta}^{\perp}=\left(\begin{array}{c:c:c}0&0&1\end{array}\right),\ (\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}})_{\vartheta}^{+}=\left(\begin{array}{c:c:c}1&0&0\\ \hdashline 0&1&0\end{array}\right). \quad (14)$$

Первый (*и конечный*) *уровень* выглядит следующим образом:

$$(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})_{1(\gamma-\psi)}=(\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}})_{\gamma-\psi}^{\perp}(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})_{1(\gamma-\psi)\gamma-\psi}(\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}})_{\gamma-\psi}^{\perp\mathrm{T}}=\left(\begin{array}{c:c}1&0\\ \hdashline 0&1\end{array}\right),$$

$$(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})_{1(\gamma-\psi)1(\vartheta)}=(\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}})_{\vartheta}^{\perp}(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})_{1(\gamma-\psi)\vartheta}(\boldsymbol{C}^{T})_{\vartheta}^{\perp\mathrm{T}}=1,$$

$$\boldsymbol{B}_{1(\gamma-\psi)}=(\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}})_{\gamma-\psi}^{\perp}\boldsymbol{A}_{\gamma-\psi}(\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}})_{\gamma-\psi}=\left(\begin{array}{c:c:c:c}0&-hK_{11}&0&0\\ \hdashline 0&0&0&-hK_{22}\end{array}\right), \quad (15)$$

$$\boldsymbol{B}_{1(\vartheta)}=(\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}})_{\vartheta}^{\perp}\boldsymbol{A}_{\vartheta}(\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}})_{\vartheta}=\left(\begin{array}{c:c}0&-hK_{33}\end{array}\right).$$

Анализ матрицы $B_{1(g-y)}$ показывает наличие у нее нарушения полноты ранга по столбцам и необходимость выполнения «скелетного» разложения. В соответствии с выражением (8), (9) определим

$$\widehat{\boldsymbol{B}}_{1(\gamma-\psi)} = \boldsymbol{B}_{1(\gamma-\psi)} \left(\begin{array}{c|c|c|c|} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)^T = \left(\begin{array}{c|c} -hK_{11} & 0 \\ \hline 0 & -hK_{22} \end{array}\right). \qquad (16)$$

Тогда

$$\widehat{\boldsymbol{B}}^{+}_{1(\gamma-\psi)} = \widehat{\boldsymbol{B}}^{-1}_{1(\gamma-\psi)} = \left(\begin{array}{c|c} -\dfrac{1}{hK_{11}} & 0 \\ \hline 0 & -\dfrac{1}{hK_{22}} \end{array}\right), \ \boldsymbol{B}^{+}_{1(\vartheta)} = \boldsymbol{B}^{-1}_{1(\vartheta)} = \left(\begin{array}{c} 0 \\ \hline -\dfrac{1}{hK_{33}} \end{array}\right). \qquad (17)$$

Для синтеза наиболее быстрого оптимального наблюдателя зададим матрицы Φ_1 для соответствующих каналов в следующем виде:

$$\Phi_{1(\gamma-\psi)} = \left(\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right), \qquad \Phi_{1(\vartheta)} = 0 . \qquad (18)$$

Выполняя вычисления по формулам, приведенным в разделе 1, с учетом матриц (14) – (18), получим

$$\begin{cases} \widehat{\boldsymbol{L}}^{\mathrm{T}}_{1(\gamma-\psi)} = \widehat{\boldsymbol{B}}^{+}_{1(\gamma-\psi)} (\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})_{1(\gamma-\psi)} - \Phi_{1(\gamma-\psi)} \widehat{\boldsymbol{B}}^{+}_{1(\gamma-\psi)} = \left(\begin{array}{c|c} \dfrac{1}{hK_{11}} & 0 \\ \hline 0 & \dfrac{1}{hK_{22}} \end{array}\right), \\ \boldsymbol{L}^{\mathrm{T}}_{1(\gamma-\psi)} = \left(\begin{array}{c|c|c|c} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)^{+} \widehat{\boldsymbol{L}}^{\mathrm{T}}_{1(\gamma-\psi)} = \left(\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline \dfrac{1}{hK_{11}} & 0 \\ \hline 0 & 0 \\ \hline 0 & \dfrac{1}{hK_{22}} \end{array}\right), \\ \boldsymbol{L}^{\mathrm{T}}_{1(\vartheta)} = \boldsymbol{B}^{+}_{1(\vartheta)} (\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})_{1(\vartheta)} - \Phi_{1(\vartheta)} \boldsymbol{B}^{+}_{1(\vartheta)} = \left(\begin{array}{c} 0 \\ \hline \dfrac{1}{hK_{33}} \end{array}\right). \end{cases}$$

Для поиска оптимального наблюдателя вычислим матрицу

$$D = \boldsymbol{B}_0^{+}\boldsymbol{A}_0\boldsymbol{B}_0 + \boldsymbol{L}_1\boldsymbol{B}_1 = \begin{pmatrix} 1 & K_{11}h & 0 & 0 & 0 & 0 \\ h & 2 & 0 & K_{21}h & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & K_{12}h & 0 & 0 \\ 0 & -K_{12}h & h & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & K_{33}h \\ 0 & 0 & 0 & 0 & h & 2 \end{pmatrix}.$$

Собственные значения матрицы D eig(D) в аналитическом виде представляют собой очень громоздкие выражения для первых четырех величин, которые обозначим

$$d_1 = f_1(h, K_{11}, K_{12}K_{21}K_{22}),\ d_2 = f_2(h, K_{11}, K_{12}K_{21}K_{22}),$$
$$d_3 = f_3(h, K_{11}, K_{12}K_{21}K_{22}),\ \ d_4 = f_4(h, K_{11}, K_{12}K_{21}K_{22}),$$

и в результате получим

$$\mathrm{eig}(D) = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ d_4 \\ \frac{3}{2} - \frac{\sqrt{4K_{33}h^2 + 1}}{2} \\ \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{4K_{33}h^2 + 1}}{2} \end{pmatrix}.$$

В силу того, что собственные значения могут быть как положительными, так и отрицательными, то для обеспечения условия нахождения внутри единичного круга Φ_{opt}—D поступим следующим образом: назначим число $\alpha = \sigma$ и будем считать, что при этом обеспечивается асимптотическая устойчивость матрицы Φ_{opt} и нахождение внутри единичного круга Φ_{opt}—D. Следовательно, значение Φ_{opt}—D определится выражением

$$\Phi_{\mathrm{opt}} = \begin{pmatrix} 1-\sigma & K_{11}h & 0 & 0 & 0 & 0 \\ h & 2-\sigma & 0 & K_{21}h & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1-\sigma & K_{22}h & 0 & 0 \\ 0 & -K_{12}h & h & 2-\sigma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1-\sigma & K_{33}h \\ 0 & 0 & 0 & 0 & h & 2-\sigma \end{pmatrix}. \qquad (19)$$

На основании (19) с использованием (21) матрица обратной связи, обеспечивающая оптимальное размещение полюсов и быструю сходимость процесса наблюдения, запишется так:

$$\boldsymbol{L}_{\text{opt}}^{\text{T}} = \left(\boldsymbol{L}_1\boldsymbol{B}^{\perp} + \boldsymbol{B}^{+}\right)\boldsymbol{A} - \Phi_{\text{opt}}\left(\boldsymbol{L}_1\boldsymbol{B}^{\perp} + \boldsymbol{B}^{+}\right) =$$

$$= \begin{pmatrix} \sigma & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma & -\dfrac{\sigma-1}{K_{11}h} & 0 & 0 & \dfrac{K_{21}}{K_{22}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sigma & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\dfrac{K_{12}}{K_{11}} & 0 & \sigma & -\dfrac{\sigma-1}{K_{22}h} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sigma & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sigma & \dfrac{\sigma-1}{K_{33}h} \end{pmatrix}. \qquad (20)$$

Следовательно, выражение (20), по сути, представляет собой решение задачи синтеза наблюдателя равновесной ориентации международной космической станции.

Уравнения (1) с учетом (20) при отсутствии управления запишутся так:

$$\hat{x}_1(n+1) = \hat{x}_1(n) + h\hat{x}_2(n) + \sigma\varepsilon_x(n+1),$$
$$\hat{x}_2(n+1) = \hat{x}_2(n) + K_{11}h\hat{x}_1(n) - K_{11}h\hat{x}_3(n) - K_{12}h\hat{x}_5(n) + \sigma\dot{\varepsilon}_x(n+1),$$
$$\hat{x}_3(n+1) = \hat{x}_3(n) + \varepsilon_x(n+1) + \frac{1-\sigma}{hK_{11}}\dot{\varepsilon}_x(n+1) + \frac{K_{12}}{K_{11}}\dot{\varepsilon}_y(n+1),$$
$$\hat{x}_4(n+1) = \hat{x}_4(n) + h\hat{x}_5(n) + \sigma\varepsilon_y(n+1),$$
$$\hat{x}_5(n+1) = \hat{x}_5(n) + K_{22}h\hat{x}_4(n) + K_{21}h\hat{x}_2(n) - K_{22}h\hat{x}_6(n) + \sigma\dot{\varepsilon}_y(n+1),$$
$$\hat{x}_6(n+1) = \hat{x}_6(n) + \frac{K_{21}}{K_{22}}\dot{\varepsilon}_x(n+1) + \varepsilon_y(n+1) + \frac{1-\sigma}{hK_{22}}\dot{\varepsilon}(n+1),$$
$$\hat{x}_7(n+1) = \hat{x}_7(n) + hx_8(n) + \sigma\varepsilon_z(n+1),$$
$$\hat{x}_8(n+1) = \hat{x}_8(n) + K_{33}h\hat{x}_7(n) - K_{33}h\hat{x}_9(n) + \sigma\dot{\varepsilon}_z(n+1),$$
$$\hat{x}_9(n+1) = \hat{x}_9(n) + \varepsilon_z(n+1) + \frac{1-\sigma}{hK_{33}}\dot{\varepsilon}_z(n+1),$$

где $\left[\hat{x}_1 \quad \hat{x}_2 \quad \hat{x}_3 \quad \hat{x}_4 \quad \hat{x}_5 \quad \hat{x}_6 \quad \hat{x}_7 \quad \hat{x}_8 \quad \hat{x}_9\right]_n^{\text{T}} =$

$$= \left[\hat{\gamma} \quad \hat{\dot{\gamma}} \quad \hat{\gamma}_0 \quad \hat{\psi} \quad \hat{\dot{\psi}} \quad \hat{\psi}_0 \quad \hat{\theta} \quad \hat{\dot{\theta}} \quad \hat{\theta}_0\right]_n^{\text{T}},$$

$$\varepsilon_x(n) = \gamma(n) - \hat{\gamma}(n), \quad \varepsilon_y(n) = \psi(n) - \hat{\psi}(n), \quad \varepsilon_z(n) = \theta(n) - \hat{\theta}(n),$$

$$\dot{\varepsilon}_x(n) = \dot{\gamma}(n) - \hat{\dot{\gamma}}(n), \quad \dot{\varepsilon}_y(n) = \dot{\psi}(n) - \hat{\dot{\psi}}(n), \quad \dot{\varepsilon}_z(n) = \dot{\theta}(n) - \hat{\dot{\theta}}(n).$$

Тогда при решении этой же задачи методом точного размещения полюсов согласно [5] имеем

$$\begin{aligned}
&\hat{x}_1(n+1) = \hat{x}_1(n) + h\hat{x}_2(n) + (s_1 - 1)(\varepsilon_x(n+1)) - h\dot{\varepsilon}_x(n+1),\\
&\hat{x}_2(n+1) = \hat{x}_2(n) + K_{11}h\hat{x}_1(n) - K_{11}h\hat{x}_3(n) - K_{12}h\hat{x}_5(n) +\\
&\qquad + (s_2 + s_5 - 2)\dot{\varepsilon}_x(n+1) - hK_{11}\varepsilon_x(n+1) + hK_{12}\dot{\varepsilon}_y(n+1),\\
&\hat{x}_3(n+1) = \hat{x}_3(n) + \frac{(s_2 - 1)(s_5 - 1)}{hK_{11}}\dot{\varepsilon}_x(n+1),\\
&\hat{x}_4(n+1) = \hat{x}_4(n) + h\hat{x}_5(n) + (s_3 - 1)\varepsilon_y(n+1) - h\dot{\varepsilon}_y(n+1),\\
&\hat{x}_5(n+1) = \hat{x}_5(n) + K_{22}h\hat{x}_4(n) + K_{21}h\hat{x}_2(n) - K_{22}h\hat{x}_6(n) +\\
&\qquad + (s_4 - s_6 - 2)\dot{\varepsilon}_y(n+1) - hK_{22}\varepsilon_y(n+1) - hK_{21}\dot{\varepsilon}_x(n+1),\\
&\hat{x}_6(n+1) = \hat{x}_6(n) + \frac{(s_4 - 1)(s_6 - 1)}{hK_{22}}\dot{\varepsilon}_y(n+1),\\
&\hat{x}_7(n+1) = \hat{x}_7(n) + hx_8(n) + (s_0 - 1)\varepsilon_z(n+1) - h\dot{\varepsilon}_z(n+1),\\
&\hat{x}_8(n+1) = \hat{x}_8(n) + K_{33}h\hat{x}_7(n) - K_{33}h\hat{x}_9(n) +\\
&\qquad + (ss_1 + ss_2 - 2)\dot{\varepsilon}_z(n+1) - hK_{33}\varepsilon_z(n+1),\\
&\hat{x}_9(n+1) = \hat{x}_9(n) + \frac{(ss_1 - 1)(ss_2 - 1)}{hK_{33}}\dot{\varepsilon}_z(n+1),
\end{aligned} \tag{22}$$

Для того чтобы также обеспечить максимально быструю сходимость с использованием решения, полученного в (22) [5], необходимо поставить значения корней $s_1 = s_2 = s_3 = s_4 = s_5 = s_6 = s_0 = ss_1 = ss_2 = 0$, и тогда система (21) запишется так:

$$\begin{aligned}
&\hat{x}_1(n+1) = \hat{x}_1(n) + h\hat{x}_2(n) + \varepsilon_x(n+1) - h\dot{\varepsilon}_x(n+1),\\
&\hat{x}_2(n+1) = \hat{x}_2(n) + K_{11}h\hat{x}_1(n) - K_{11}h\hat{x}_3(n) - K_{12}h\hat{x}_5(n) + 2\dot{\varepsilon}_x(n+1) -\\
&\qquad - hK_{11}\varepsilon_x(n+1) + hK_{12}\dot{\varepsilon}_y(n+1),\\
&\hat{x}_3(n+1) = \hat{x}_3(n) + \frac{5}{K_{11}}\dot{\varepsilon}_x(n+1),\\
&\hat{x}_4(n+1) = \hat{x}_4(n) + h\hat{x}_5(n) + \varepsilon_y(n+1) - h\dot{\varepsilon}_y(n+1),\\
&\hat{x}_5(n+1) = \hat{x}_5(n) + K_{22}h\hat{x}_4(n) + K_{21}h\hat{x}_2(n) - K_{22}h\hat{x}_6(n) + 2\dot{\varepsilon}_y(n+1) -\\
&\qquad - hK_{22}\varepsilon_y(n+1) - hK_{21}\dot{\varepsilon}_x(n+1),
\end{aligned} \tag{23}$$

$$\begin{aligned}
&\hat{x}_6(n+1) = \hat{x}_6(n) + \frac{5}{K_{22}}(\dot{\varepsilon}_y(n+1)),\\
&\hat{x}_7(n+1) = \hat{x}_7(n) + hx_8(n) + \varepsilon_z(n+1) - h\dot{\varepsilon}_z(n+1),\\
&\hat{x}_8(n+1) = \hat{x}_8(n) + K_{33}h\hat{x}_7(n) - K_{33}h\hat{x}_9(n) + 2\dot{\varepsilon}_z(n+1) -\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad - hK_{33}\varepsilon_z(n+1),\\
&\hat{x}_9(n+1) = \hat{x}_9(n) + \frac{5}{K_{33}}\dot{\varepsilon}_z(n+1).
\end{aligned} \tag{23}$$

Сравнивая (22) с (23), можно констатировать изменение структуры матрицы $\boldsymbol{L}$ наблюдателя при оптимальном размещении полюсов и при применении метода синтеза, основанного на методе точного размещения полюсов.

Заключение. В работе получено аналитическое решение задачи оценки равновесной ориентации международной космической станции с использованием метода оптимального размещения полюсов. Особенность этого решения заключается в том, что оно базируется, с одной стороны, на максимально быстрой сходимости, а с другой, — обеспечивает при этом оптимальное значение квадратичного функционала качества Летова — Калмана [4].

ЛИТЕРАТУРА

[1] Zhou K., Doyle J.C. *Essentials of robust control*. Upper Saddle River, New Jersey, Prentice Hall, 1998.

[2] Кузовков Н.Т. *Модальное управление и наблюдающие устройства*. Москва, Машиностроение, 1976.

[3] Зубов Н.Е., Микрин Е.А., Мисриханов М.Ш. Модификация метода точного размещения полюсов и его применение в задачах управления движением космического аппарата. *Изв. РАН. ТиСУ*, 2013, № 2, с. 118–132.

[4] Зубов Н.Е., Микрин Е.А., Мисриханов М.Ш., Рябченко В.Н. Синтез законов управления космическим аппаратом, обеспечивающих оптимальное размещение полюсов замкнутой системой управления. *Изв. РАН. ТиСУ*, 2012, № 3, с. 98–111.

[5] Зубов Н.Е., Микрин Е.А., Рябченко В.Н. и др. Применение метода точного размещения полюсов к решению задач наблюдения и идентификации. *Изв. РАН. ТиСУ*, 2013, № 1, с. 135–151.

Статья поступила в редакцию 28.06.2013

Ссылку на эту статью просим оформлять следующим образом:

Зубов Н.Е., Микрин Е.А., Рябченко В.Н. Модель наблюдателя с использованием алгоритма оптимального размещения полюсов и ее применение в задачах управления космическим аппаратом. *Инженерный журнал: наука и инновации*, 2013, вып. 10. URL: http://engjournal.ru/catalog/it/nav/1076.html

Зубов Николай Евгеньевич — д-р техн. наук, заместитель руководителя по науке научно-технического центра ОАО «РКК ”Энергия“ имени С.П. Королёва», профессор кафедры «Системы автоматического управления» МГТУ им. Н.Э. Баумана. Автор более 70 работ в области проблем управления космическими аппаратами. e-mail: Nikolay.Zubov@rsce.ru

Микрин Евгений Анатольевич — д-р техн. наук, академик РАН, первый заместитель генерального конструктора ОАО «РКК ”Энергия“ имени С.П. Королёва», зав. кафедрой «Системы автоматического управления» МГТУ им. Н.Э. Баумана. Автор более 100 работ в области проблем управления космическими аппаратами.

Рябченко Владимир Николаевич — д-р техн. наук, ведущий научный сотрудник, заместитель научно-технического центра ОАО «РКК ”Энергия“ имени С.П. Королёва». Автор более 200 работ в области проблем управления космическими аппаратами.