

Об одном методе решения задачи синтеза законов управления угловым движением возвращаемого аппарата

© Н.Е. Зубов^{1,2}, А.В. Лапин¹, Е.А. Микрин^{1,2}

¹ ОАО «Ракетно-космическая корпорация "Энергия" имени С.П. Королёва»,
г. Королев Московской области, 141070, Россия

² МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, 105005, Россия

Рассматривается применение модального управления при наличии детерминированных внешних возмущений к решению задачи управления угловым движением возвращаемого аппарата с посадочной твердотопливной двигательной установкой на участке приземления при описании кинематических уравнений в углах Эйлера — Крылова. Приведены примеры численного моделирования.

Ключевые слова: возвращаемый аппарат, внешнее возмущение, модальное управление, метод точного размещения полюсов, углы Эйлера — Крылова.

Введение. В настоящее время при посадке на Землю спускаемого аппарата (СА) с малым аэродинамическим качеством используют парашютные системы, которые обеспечивают требуемые условия приземления. Другим способом, позволяющим осуществить мягкое приземление многоразовых транспортных космических систем, является применение посадочной твердотопливной двигательной установки (ПТДУ). В данном случае управление угловым движением возвращаемого аппарата (ВА) существенно отличается от управления СА в атмосфере до момента раскрытия парашютов. В силу особенностей ПТДУ успех приземления во многом зависит от того, насколько быстро после включения двигателя угловое положение ВА относительно посадочной площадки окажется близким к вертикальному. Построение такой ориентации необходимо для того, чтобы наиболее эффективно проводить управление траекторией снижения и гашение вертикальной скорости. В этом случае алгоритмы управления угловым движением СА [1], используемые в настоящее время при спуске одноразовых кораблей, неприемлемы, поскольку они не обеспечивают минимального времени переходного процесса (ПП) при программном развороте СА в атмосфере. Применение оптимального по быстродействию управления в реальном масштабе времени при наличии верхнего ограничения на абсолютную величину угловой скорости ВА, по мнению авторов, невозможно, так как современные радиационно стойкие бортовые цифровые вычислительные машины (БЦВМ) вряд ли смогут его реализовать.

Основополагающим фактом при синтезе законов управления является то, что ПТДУ можно отнести к классу дросселируемых двигателей и создаваемый вращающий момент регулируется в широких пределах. Учитывая данную особенность ПТДУ, для решения указанной задачи будем использовать методы модального управления при наличии внешних возмущений с точным размещением полюсов [2], применив численный оптимизационный подход к поиску конкретных значений полюсов, обеспечивающих минимальное время ПП при наличии верхнего ограничения на абсолютную величину угловой скорости ВА. Следует отметить, что полученный минимум является условным, а не абсолютным.

1. Уравнения углового движения ВА. При описании углового движения ВА с ПТДУ на участке приземления используется несколько правых ортогональных систем координат.

Инерциальная система координат (ИСК) $O_{ix_iy_iz_i}$ имеет начало в заданной расчетной точке посадки. Ось O_{ix_i} направлена по местной вертикали вверх. Ось O_{iy_i} лежит в горизонтальной плоскости и направлена на север по касательной к меридиану в расчетной точке посадки.

Геометрическая система координат (ГСК) $O_{gx_gy_gz_g}$ ведет отсчет от полюсной точки лобового щита ВА. Ось O_{gx_g} направлена вдоль продольной оси в сторону торцевого шпангоута. Ось O_{gz_g} лежит в плоскости условной симметрии ВА, перпендикулярна оси O_{gx_g} и направлена в сторону тангажного блока.

Связанная система координат (ССК) $O_{cx_cy_cz_c}$ получена путем параллельного переноса ГСК в центр масс (ЦМ) ВА.

ВА рассматривается как абсолютно твердое тело, обладающее осевой симметрией относительно своей продольной оси O_{gx_g} . Динамика углового движения такого тела описывается в ССК уравнениями Эйлера [3]

$$\mathbf{J}\dot{\boldsymbol{\omega}} + \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{J}\boldsymbol{\omega}) = \mathbf{M}_a + \mathbf{M}_y, \quad (1.1)$$

где \mathbf{J} — матрица тензора инерции ВА, $\boldsymbol{\omega}$ — вектор угловой скорости, \mathbf{M}_a — аэродинамический момент, \mathbf{M}_y — управляющий момент. Кинематика углового движения может быть описана уравнениями в углах Крылова [4]

$$\dot{\boldsymbol{\Theta}} = \mathbf{G}(\boldsymbol{\Theta}) \cdot \boldsymbol{\omega}, \quad (1.2)$$

где $\boldsymbol{\Theta} = [\gamma, \psi, \vartheta]^T$ — обобщенный вектор углового положения, содержащий угол крена γ , угол рысканья ψ и угол тангажа ϑ , а $\mathbf{G}(\boldsymbol{\Theta})$ — матрица кинематических уравнений. Здесь и далее одна или несколько точек над символом переменной обозначают производную соответствующего порядка от данной функции по времени t . Конкретный

вид матрицы $\mathbf{G}(\Theta)$ определяется последовательностью элементарных поворотов, задающих переход от ИСК к ССК.

В общем случае имеется шесть возможных последовательностей элементарных поворотов [4]. Углы первого и третьего поворотов изменяются в диапазоне от -180° до $+180^\circ$. Угол второго поворота лежит в пределах от -90° до $+90^\circ$. В данной работе принята последовательность поворотов «рысканье — тангаж — крен», т. е. матрица кинематических уравнений имеет вид

$$\mathbf{G}(\Theta) = \begin{bmatrix} 1, & \sin \vartheta, & 0 \\ 0, & \cos \gamma \cos \vartheta, & \sin \gamma \\ 0, & -\sin \gamma \cos \vartheta, & \cos \gamma \end{bmatrix}. \quad (1.3)$$

Упрощенная бортовая модель аэродинамики ВА подразумевает, что аэродинамический момент можно рассчитать на основе принципов стационарной аэродинамики [5], т. е. в зависимости только от углового положения и заданной центровки (положения ЦМ) ВА. Предполагается, что для любого угла атаки α известны не зависящие от угла собственного вращения ϕ значения коэффициентов нормальной и тангенциальной составляющих аэродинамической силы C_n и C_τ , а также коэффициента аэродинамического момента m_n относительно условного положения ЦМ ВА в ГСК (радиус-вектор \mathbf{r}_0). Зная реальное положение ЦМ ВА в ГСК (радиус-вектор \mathbf{r}), можно определить вектор аэродинамического момента в проекциях на оси ССК по формулам

$$\mathbf{M}_a = \frac{\rho V_f^2}{2} SL \cdot \begin{bmatrix} C_n \cdot (\Delta r_{y_c} \sin \phi + \Delta r_{z_c} \cos \phi) \\ -\bar{m}_n \sin \phi + \Delta r_{z_c} C_\tau \\ -\bar{m}_n \cos \phi - \Delta r_{y_c} C_\tau \end{bmatrix}, \quad (1.4)$$

где ρ — плотность атмосферы, V_f — модуль вектора скорости набегающего потока, S и L — характерные значения площади миделева сечения и длины ВА, $\bar{m}_n = m_n + \Delta r_{x_c} C_n$ — приведенный коэффициент аэродинамического момента, Δr_{x_c} , Δr_{y_c} и Δr_{z_c} — соответствующие проекции вектора относительной центровки $\Delta \mathbf{r} = (\mathbf{r}_0 - \mathbf{r})/L$ на оси ССК.

Зависимость плотности атмосферы ρ от абсолютной высоты H_{abs} над уровнем моря, согласно [6], описывается формулой

$$\rho(H_{\text{abs}}) = \rho_0 \cdot \exp(k_1 H_{\text{abs}} + k_2 H_{\text{abs}}^2), \quad (1.5)$$

где $\rho_0 = 1,228 \text{ кг/м}^3$ — стандартная плотность атмосферы на уровне моря, $k_1 = -0,090764 \text{ км}^{-1}$ и $k_2 = -0,0020452 \text{ км}^{-2}$ — параметры модели атмосферы.

В рассматриваемой задаче значение H_{abs} представляет собой сумму высоты посадочного полигона $H_0 = 0,3 \text{ км}$ над уровнем моря и текущей высоты $H < 2,5 \text{ км}$ ЦМ ВА над поверхностью посадочного полигона. В этом случае зависимость (1.5) можно приближенно заменить линейной зависимостью

$$\rho(H) = kH + b \quad (1.6)$$

с параметрами $k = -0,104 \text{ кг} \cdot \text{км}^{-1}/\text{м}^3$ и $b = 1,195 \text{ кг/м}^3$ (рис. 1).

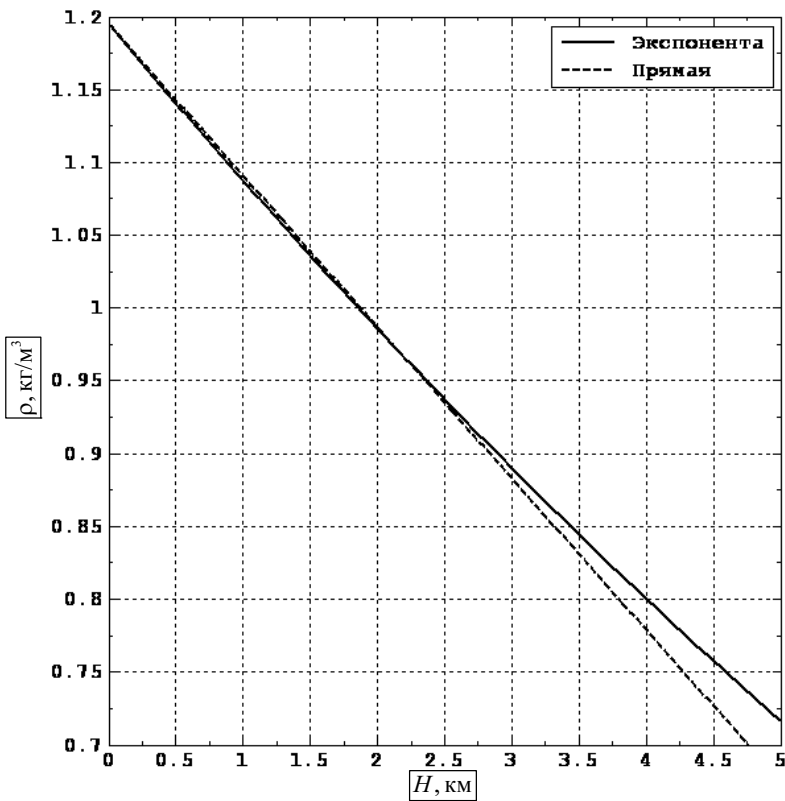


Рис. 1. Зависимость плотности атмосферы от высоты над поверхностью Земли

Значения аэродинамических углов $\alpha \in [0^\circ; 180^\circ]$ и $\varphi \in (-180^\circ; 180^\circ]$ однозначно определяются составляющими $V_{f x_c}$, $V_{f y_c}$ и $V_{f z_c}$ вектора скорости набегающего потока V_f в ССК согласно формулам

$$\cos \alpha = \frac{V_f x_c}{V_f}, \quad \sin \varphi = V_f z_c, \quad \cos \varphi = -V_f y_c. \quad (1.7)$$

2. Линеаризация уравнений углового движения ВА. Перепишем систему из динамических уравнений (1.1) и кинематических уравнений (1.2) в виде обобщенного векторно-матричного дифференциального уравнения

$$\begin{bmatrix} \dot{\Theta} \\ \dot{\omega} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{G}(\Theta) \cdot \omega \\ \mathbf{J}^{-1} \cdot \mathbf{M}(\Theta, \omega) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{3 \times 3} \\ \mathbf{J}^{-1} \end{bmatrix} \cdot \mathbf{M}_y, \quad (2.1)$$

для краткости обозначив символом $\mathbf{M}(\Theta, \omega) = \mathbf{M}_a(\Theta) + \mathbf{M}_r(\omega)$ суммарный момент неактивных сил, действующих на ВА, символом $\mathbf{M}_r(\omega) = (\mathbf{J}\omega) \times \omega$ — гироскопический момент, а $\mathbf{0}_{n \times m}$ — нулевую матрицу размером $n \times m$.

Объект (2.1) представляет собой нелинейную нестационарную систему автоматического регулирования (САР) с шестимерным вектором состояния $\mathbf{x}^T = [\Theta^T, \omega^T]$ и трехмерным вектором управления $\mathbf{u} = \mathbf{M}_y$. Для синтеза алгоритма управления предлагается на каждом вычислительном такте БЦВМ в рамках одного такта считать данную САР линейной и стационарной в соответствии с нижеследующими допущениями.

Положим, что в пределах одного такта длительностью h параметры движения ЦМ (радиус-вектор \mathbf{R} и вектор линейной скорости \mathbf{V} в ИСК), а также параметры \mathbf{J} и \mathbf{r} , характеризующие распределение масс ВА, условно постоянны и соответствуют значениям, зафиксированным в начале текущего такта. Условимся значения соответствующих переменных величин в начале такта обозначать верхней чертой.

Пусть задана (получена по результатам измерений) величина вектора состояния в начале такта — $\bar{\mathbf{x}}^T = [\bar{\Theta}^T, \bar{\omega}^T]$. Осуществим линеаризацию системы (2.1) на такте вблизи положения $\bar{\mathbf{x}}$, приняв для матричных функций $\mathbf{G}(\Theta)$ и $\mathbf{M}(\Theta, \omega)$ соответственно нулевое и первое приближения по Тейлору:

$$\begin{cases} \mathbf{G}(\Theta) \equiv \mathbf{G}(\bar{\Theta}), \\ \mathbf{M}(\Theta, \omega) = \mathbf{M}(\bar{\Theta}, \bar{\omega}) + \mathbf{M}'_{\Theta}(\bar{\Theta}, \bar{\omega}) \cdot (\Theta - \bar{\Theta}) + \mathbf{M}'_{\omega}(\bar{\Theta}, \bar{\omega}) \cdot (\omega - \bar{\omega}). \end{cases} \quad (2.2)$$

Здесь $\mathbf{M}'_{\Theta}(\bar{\Theta}, \bar{\omega})$ и $\mathbf{M}'_{\omega}(\bar{\Theta}, \bar{\omega})$ — значения матриц Якоби, содержащих частные производные от функции $\mathbf{M}(\Theta, \omega)$ соответственно по аргументам Θ и ω , в точке с координатами $(\bar{\Theta}, \bar{\omega})$.

Подставив выражения (2.2) в (2.1), получим уравнение линейной стационарной САР, приближенно заменяющее систему (2.1) в рамках одного вычислительного такта:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} + \mathbf{N}\xi, \quad (2.3)$$

где \mathbf{A} — матрица состояния размерности 6×6 , \mathbf{B} — матрица управления размерности 6×3 , ξ — трехмерный вектор постоянных детерминированных возмущений, \mathbf{N} — матрица возмущений размерности 6×3 . Параметры линеаризованной модели (2.3) для текущего такта определяются следующим образом:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{3 \times 3}, & \mathbf{G}(\bar{\Theta}) \\ \bar{\mathbf{J}}^{-1} \cdot \mathbf{M}'_{\Theta}(\bar{\Theta}, \bar{\omega}), & \bar{\mathbf{J}}^{-1} \cdot \mathbf{M}'_{\omega}(\bar{\Theta}, \bar{\omega}) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \mathbf{N} = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{3 \times 3} \\ \bar{\mathbf{J}}^{-1} \end{bmatrix}, \quad (2.4)$$

$$\xi = \mathbf{M}(\bar{\Theta}, \bar{\omega}) - \mathbf{M}'_{\Theta}(\bar{\Theta}, \bar{\omega}) \cdot \bar{\Theta} - \mathbf{M}'_{\omega}(\bar{\Theta}, \bar{\omega}) \cdot \bar{\omega}.$$

К системе (2.3) можно применить теорию модального управления при наличии постоянных детерминированных внешних возмущений.

3. Модальное управление при постоянных детерминированных внешних возмущениях. Пусть объект, описываемый уравнением (2.3), на каждом такте подвержен детерминированному внешнему возмущению $\xi(t) = \text{const}$, и задан трехмерный вектор регулируемых переменных

$$\mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x}, \quad (3.1)$$

где \mathbf{C} — заданная матрица регулируемых параметров размером 3×6 , такая что

$$\text{rank} \begin{bmatrix} \mathbf{A}, & \mathbf{B} \\ \mathbf{C}, & \mathbf{0}_{3 \times 3} \end{bmatrix} = 9. \quad (3.2)$$

Требуется найти управление \mathbf{u} , при котором установившаяся ошибка по регулируемому вектору удовлетворяла бы условию $\mathbf{y}_{\text{уст}} = \lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{y}(t) = 0$, а корни характеристического уравнения замкнутой САР (ЗСАР) располагались бы заданным образом в плоскости корней.

Для решения задачи введем новые переменные $\Delta \mathbf{x} = \mathbf{x} - \mathbf{x}_{\text{уст}}$ и $\Delta \mathbf{u} = \mathbf{u} - \mathbf{u}_{\text{уст}}$, где $\mathbf{x}_{\text{уст}}$ и $\mathbf{u}_{\text{уст}}$ — установившиеся ошибки по векторам состояния и управления соответственно. Поскольку $\dot{\mathbf{x}}_{\text{уст}} = 0$, из уравнения (2.3) следует, что $\mathbf{A}\mathbf{x}_{\text{уст}} + \mathbf{B}\mathbf{u}_{\text{уст}} = -\mathbf{N}\xi$, а поскольку $\mathbf{y}_{\text{уст}} = 0$, то, согласно тождеству (3.1), $\mathbf{C}\mathbf{x}_{\text{уст}} = 0$. Таким образом, можно записать выражение для объединенного вектора установившихся ошибок:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{x}_{уст} \\ \mathbf{u}_{уст} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \mathbf{A}, & \mathbf{B} \\ \mathbf{C}, & \mathbf{0}_{3 \times 3} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{N} \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} \end{bmatrix} \cdot \xi. \quad (3.3)$$

В новых переменных уравнение (2.3) приобретает вид

$$\Delta \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A} \Delta \mathbf{x} + \mathbf{B} \Delta \mathbf{u}. \quad (3.4)$$

Предположим, что некоторым образом найдено управление $\Delta \mathbf{u} = -\mathbf{K} \Delta \mathbf{x}$ с матрицей регулятора по состоянию \mathbf{K} размерности 3×6 , обеспечивающее требуемое расположение корней ЗСАР. Тогда, согласно определению переменных $\Delta \mathbf{x}$ и $\Delta \mathbf{u}$, очевидно, что $\mathbf{u} = -\mathbf{K} \mathbf{x} + (\mathbf{K} \mathbf{x}_{уст} + \mathbf{u}_{уст})$, т. е., возвращаясь к прежним переменным, с учетом (3.4) можно получить искомое управление

$$\mathbf{u} = -\mathbf{K} \mathbf{x} - [\mathbf{K}, \mathbf{E}_3] \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{A}, & \mathbf{B} \\ \mathbf{C}, & \mathbf{0}_{3 \times 3} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{N} \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} \end{bmatrix} \cdot \xi. \quad (3.5)$$

Символом \mathbf{E}_n обозначена единичная матрица порядка n . Отметим, что управление может быть вычислено по формуле (3.5) тогда и только тогда, когда выполняется соотношение (3.2).

Применительно к рассматриваемой задаче об угловом движении ВА матрицы \mathbf{A} , \mathbf{B} и \mathbf{N} , а также вектор ξ в формуле (3.5) определяются согласно (2.4), а матрица регулируемых параметров имеет вид $\mathbf{C} = [\mathbf{E}_3, \mathbf{0}_{3 \times 3}]$. Подставив указанные значения параметров в формулу (3.5) и проведя соответствующие расчеты в пакете символьных вычислений Symbolic Math Toolbox (среда MATLAB) [7], окончательно получим тождество

$$\mathbf{u} = -\xi - \mathbf{K} \mathbf{x}. \quad (3.6)$$

Матрицу \mathbf{K} , входящую в запись выражения (3.6), определим методом точного размещения полюсов согласно алгоритму, изложенному в [2].

4. Алгоритм точного размещения полюсов. Пусть задана линейная многомерная САР (3.4) с параметрами (2.4), вектором состояния $\Delta \mathbf{x} \in \mathbb{R}^6$ и вектором управления $\Delta \mathbf{u} \in \mathbb{R}^3$, где \mathbb{R} — множество действительных чисел. Из (2.4) видно, что ранг матрицы управления $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{6 \times 3}$ равен числу ее столбцов (входные сигналы линейно независимы). Матрица состояния $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{6 \times 6}$ заведомо неустойчива, поскольку среди ее шести ($i = \overline{1 \dots 6}$) собственных значений в спектре $\text{eig}(\mathbf{A}) = \{ \tilde{\lambda}_i \in \mathbb{R} : \det(\tilde{\lambda}_i \mathbf{E}_6 - \mathbf{A}) = 0 \}$ обязательно найдутся такие значения $\tilde{\lambda}_i$ из множества комплексных чисел \mathbb{C} , что $\text{Re} \tilde{\lambda}_i > 0$.

С помощью вышеназванного пакета символьных вычислений установлено, что $\text{rank}[\mathbf{B}, \mathbf{A}\mathbf{B}, \dots, \mathbf{F}^5\mathbf{B}] = 6$, т. е. САР (3.4) с параметрами (2.4) полностью управляема согласно критерию Калмана.

Требуется найти закон управления $\Delta \mathbf{u} = -\mathbf{K}\Delta \mathbf{x}$, характеризуемый матрицей регулятора по состоянию $\mathbf{K} \in \mathbb{R}^{3 \times 6}$, такой, чтобы все шесть элементов λ_i спектра ЗСАР $\text{eig}(\mathbf{A} - \mathbf{BK}) = = \{\lambda_i \in \mathbb{C} : \det(\lambda_i \mathbf{E}_6 - \mathbf{A} + \mathbf{BK}) = 0\}$ лежали в открытой левой полуплоскости на комплексной плоскости \mathbb{C} , т. е. для любого i выполнялось неравенство $\text{Re}\lambda_i < 0$.

Для решения поставленной задачи воспользуемся следующими матрицами: \mathbf{B}^\perp — левый полуортогональный делитель нуля, \mathbf{B}^+ — псевдообратная матрица Мура — Пенроуза [8], для которых, соответственно, выполняются соотношения

$$\begin{aligned} \mathbf{B}^\perp \mathbf{B} &= \mathbf{0}_{3 \times 3}, & \mathbf{B}^\perp \mathbf{B}^{\perp \top} &= \mathbf{E}_3, \\ \mathbf{B}\mathbf{B}^+ \mathbf{B} &= \mathbf{B}, & \mathbf{B}^+ \mathbf{B}\mathbf{B}^+ &= \mathbf{B}^+, & (\mathbf{B}^+ \mathbf{B})^\top &= \mathbf{B}^+ \mathbf{B}, & (\mathbf{B}\mathbf{B}^+)^\top &= \mathbf{B}\mathbf{B}^+. \end{aligned}$$

Введем в рассмотрение двухуровневую декомпозицию системы (3.4) по схеме, изложенной в [2], учитывая, что ранг каждой их вводимых матриц \mathbf{B}_0 и \mathbf{B}_1 совпадает с соответствующим числом столбцов:

нулевой уровень

$$\mathbf{A}_0 = \mathbf{A}, \quad \mathbf{B}_0 = \mathbf{B},$$

первый уровень

$$\mathbf{A}_1 = \mathbf{B}_0^\perp \mathbf{A}_0 \mathbf{B}_0^{\perp \top}, \quad \mathbf{B}_1 = \mathbf{B}_0^\perp \mathbf{A}_0 \mathbf{B}_0.$$

Тогда требуемое управление, согласно [2], определится выражением

$$\mathbf{K} = \mathbf{K}_0 = (\mathbf{B}_0^+ + \mathbf{K}_1 \mathbf{B}_0^\perp) \cdot \mathbf{A}_0 - \Phi_0 \cdot (\mathbf{B}_0^+ + \mathbf{K}_1 \mathbf{B}_0^\perp), \quad (4.7)$$

где $\mathbf{K}_1 = \mathbf{B}_1^+ \mathbf{A}_1 - \Phi_1 \mathbf{B}_1^+$, а матрицы Φ_0 и Φ_1 удовлетворяют тождеству $\text{eig}(\mathbf{A} - \mathbf{BK}) = \text{eig}(\Phi_0) \cup \text{eig}(\Phi_1)$, т. е. собственные значения матриц Φ_0 и Φ_1 являются корнями характеристического полинома ЗСАР $\det(\lambda \mathbf{E}_6 - \mathbf{A} + \mathbf{BK})$.

Назначим три пары действительных (в том числе равных) либо комплексно-сопряженных чисел $(\lambda_{\gamma 0}, \lambda_{\gamma 1})$, $(\lambda_{\psi 0}, \lambda_{\psi 1})$, $(\lambda_{\rho 0}, \lambda_{\rho 1})$, образующих желаемый спектр ЗСАР, а матрицы Φ_0 и Φ_1 зададим такими, что $\text{eig}(\Phi_0) = \{\lambda_{\gamma 0}, \lambda_{\psi 0}, \lambda_{\rho 0}\}$ и $\text{eig}(\Phi_1) = \{\lambda_{\gamma 1}, \lambda_{\psi 1}, \lambda_{\rho 1}\}$. На основании выражения (4.1) в MATLAB можно рассчитать матрицу регулятора по состоянию

$$\mathbf{K} = \left[\mathbf{M}'_{\Theta}(\bar{\Theta}, \bar{\omega}) + \mathbf{Q}\bar{\mathbf{J}} \cdot \mathbf{G}^{-1}(\bar{\Theta}), \quad \mathbf{M}'_{\omega}(\bar{\Theta}, \bar{\omega}) + \mathbf{P}\bar{\mathbf{J}} \right], \quad (4.8)$$

где $\mathbf{Q} = \Phi_0 \Phi_1$, $\mathbf{P} = -(\Phi_0 + \Phi_1)$.

Подставив в формулу (3.6) значение \mathbf{K} из (4.2), а также значение ξ из (2.4), и считая, что к началу каждого такта измерители могут обеспечивать БЦВМ информацией о векторе состояния, запишем выражение для искомого вектора управления в любой дискретный момент времени (с шагом h):

$$\mathbf{u} = -\mathbf{M} - \left(\mathbf{Q}\mathbf{J} \cdot \mathbf{G}^{-1}(\Theta) \cdot \Theta + \mathbf{P}\mathbf{J}\omega \right). \quad (4.9)$$

Равенство (4.3) с учетом (1.2) может быть преобразовано к виду

$$\mathbf{u} = -\mathbf{M} - \left(\mathbf{P}\mathbf{J} \cdot \mathbf{G}^{-1}(\Theta) \cdot \dot{\Theta} + \mathbf{Q}\mathbf{J} \cdot \mathbf{G}^{-1}(\Theta) \cdot \Theta \right). \quad (4.10)$$

Если принять матрицы Φ_0 и Φ_1 диагональными и положить, что в желаемом спектре ЗСАР имеются кратные корни $\lambda_{\gamma 0} = \lambda_{\psi 0} = \lambda_{\vartheta 0} = l_0$ и $\lambda_{\gamma 1} = \lambda_{\psi 1} = \lambda_{\vartheta 1} = l_1$, а числа l_0 и l_1 являются действительными или комплексно-сопряженными, то можно упростить формулу (4.4), а именно записать

$$\mathbf{u} = -\mathbf{M} - \mathbf{J} \cdot \mathbf{G}^{-1}(\Theta) \cdot (p\dot{\Theta} + q\Theta), \quad (4.11)$$

где $p = -(l_0 + l_1)$ и $q = l_0 l_1$ — параметры управления (действительные числа).

Подставив (4.5) в (2.3) и условно продолжая считать, что на такте $\mathbf{G}(\Theta) \equiv \mathbf{G}(\bar{\Theta}) = \text{const}$, получим векторное уравнение управляемого движения ВА

$$\ddot{\Theta} + p\dot{\Theta} + q\Theta = \mathbf{0}. \quad (4.12)$$

Данное линейное однородное дифференциальное уравнение (ЛОДУ) с постоянными коэффициентами описывает три подобных друг другу отдельных движения — по каналам крена, рысканья и тангажа. Таким образом, синтезирован развязывающий закон управления (4.5) по трем каналам углового движения.

5. Оптимизация параметров управления по времени переходного процесса. Для асимптотической устойчивости процесса, описываемого ЛОДУ (4.6) и соответствующим характеристическим полиномом $l^2 + pl + q$, необходимо и достаточно, чтобы корни l_0 и l_1 располагались в левой полуплоскости на комплексной плоскости. Это условие, согласно критерию Гурвица, эквивалентно тому, что параметры управления p и q должны быть строго положительными действительными числами.

Далее будем рассматривать только тот канал управления (обозначим его θ), которому соответствует наибольшее по модулю начальное значение угла $\theta_0 = \max(|\gamma_0|, |\psi_0|, |\vartheta_0|)$.

Поставим задачу для любых начальных значений угла $\theta_0 \in (0^\circ; 180^\circ]$ и угловой скорости $\dot{\theta}_0 \in [-15^\circ/\text{с}; +15^\circ/\text{с}]$ определить такие значения параметров управления $p = p_{\text{opt}}$ и $q = q_{\text{opt}}$, чтобы обеспечить минимальную возможную длительность переходного процесса (ПП) $T_{\text{ПП}} = T_{\text{ПП opt}}$ при условии $\dot{\theta}_{\text{max}} \leq \dot{\theta}_{\text{lim}} + \delta$, где $\dot{\theta}_{\text{max}} = \max_{t \leq T_{\text{ПП}}} |\dot{\theta}(t)|$.

Предельная угловая скорость $\dot{\theta}_{\text{lim}}$ определяется порогом чувствительности бортовых измерительных приборов, а также возможностями человеческого организма. При этом допустимое превышение скорости $\dot{\theta}_{\text{lim}}$ может быть не более $\delta = 2 \dots 3$ $^\circ/\text{с}$. Примем $\dot{\theta}_{\text{lim}} = 20$ $^\circ/\text{с}$, а критерием окончания ПП будем считать одновременное выполнение неравенств $|\theta(t)| \leq 0,057^\circ$ и $|\dot{\theta}(t)| \leq 0,057$ $^\circ/\text{с}$ для любого $t \geq T_{\text{ПП}}$.

Математическое моделирование процесса (4.6) в среде программирования Delphi показало, что область допустимых значений (ОДЗ) параметров p и q , при которых выполняется условие $\dot{\theta}_{\text{max}} \leq \dot{\theta}_{\text{lim}}$, ограничена тремя линиями: $p \equiv 0$, $q \equiv 0$ и $q = q_{\text{lim}}(p)$. При этом функция $q_{\text{lim}}(p)$ на всем диапазоне изменения аргумента $p \geq 0$ определяется однозначно и близка к линейной функции. На рис. 2 показано, как строится ОДЗ параметров p и q на примере начальных условий $\theta_0 = 60^\circ$ и $\dot{\theta}_0 = 0$ (при построении использовался графический редактор среды MATLAB).

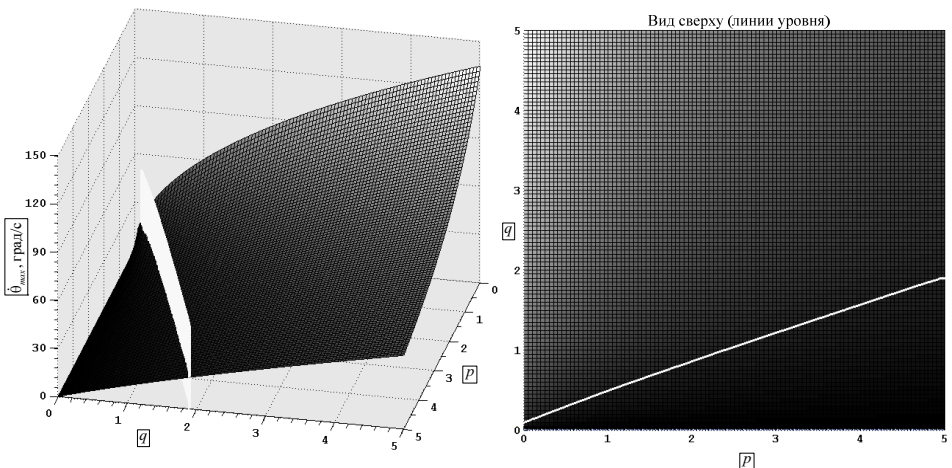


Рис. 2. ОДЗ параметров управления при $\theta_0 = 60^\circ$ и $\dot{\theta}_0 = 0$

Зная ОДЗ параметров управления и построив поверхность $T_{\text{ПП}}(p, q)$, можно определить значения $p = p_{\text{opt}}$ и $q = q_{\text{opt}}$, при которых достигается минимальное время ПП $T_{\text{ПП}} = T_{\text{ПП opt}}$. В качестве примера это было проделано для рассмотренных ранее начальных условий $\theta_0 = 60^\circ$ и $\dot{\theta}_0 = 0$. Результаты приведены на рис. 3.

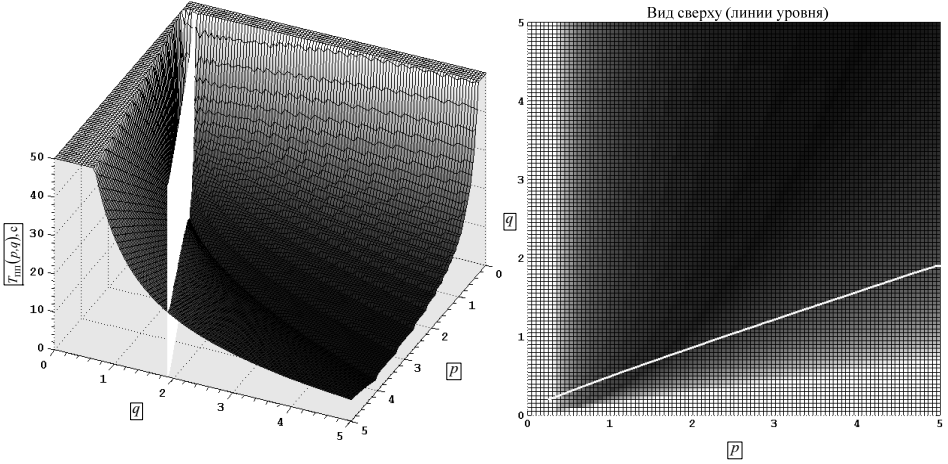


Рис. 3. Зависимость времени ПП от параметров управления при $\theta_0 = 60^\circ$ и $\dot{\theta}_0 = 0$

По итогам проведенных исследований для различных значений θ_0 и $\dot{\theta}_0$ было установлено, что оптимальные значения параметров управления лежат на границе ОДЗ, а именно на кривой $q = q_{\text{lim}}(p)$. Функциональные зависимости $T_{\text{ПП}}(p, q_{\text{lim}}(p))$ имеют единственный экстремум — минимум, соответствующий относительно небольшим значениям аргумента p (рис. 4). Это позволяет при отыскании точки минимума p_{opt} ограничить ОДЗ параметра p значением $p_{\text{lim}} = 10$.

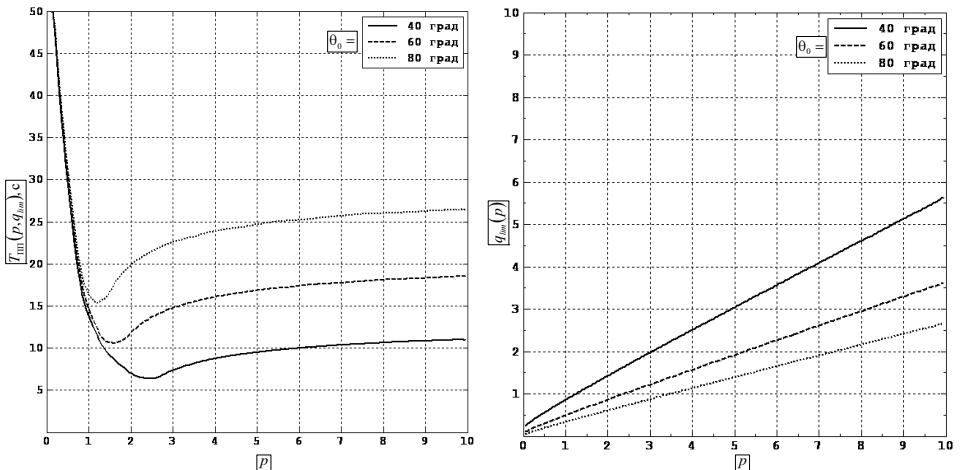


Рис. 4. Зависимости $T_{\text{ПП}}(p, q_{\text{lim}}(p))$ при $\dot{\theta}_0 = 0$ и различных значениях θ_0

Графические зависимости, аналогичные приведенным на рис. 4, были построены для всех начальных значений угла $\theta_0 \in [20^\circ; 180^\circ]$ (с шагом 10°) и угловой скорости $\dot{\theta}_0 \in [-15^\circ/\text{с}; +15^\circ/\text{с}]$ (с шагом $15^\circ/\text{с}$). В результате определены значения p_{opt} и q_{opt} с точностью до 0,01 и получены функции $p_{\text{opt}}(\theta_0)$, $q_{\text{opt}}(\theta_0)$ и $T_{\text{ПП opt}}(\theta_0)$ для каждого из трех значений $\dot{\theta}_0$ (рис. 5 и 6). Анализируя графики, представленные на рис. 5, нетрудно видеть, что при одной и той же величине θ_0 оптимальные значения p_{opt} и q_{opt} для различных величин $\dot{\theta}_0$ практически не отличаются друг от друга. Это позволяет считать, что $p_{\text{opt}}(\theta_0, \dot{\theta}_0) \approx p_{\text{opt}}(\theta_0, 0)$ и $q_{\text{opt}}(\theta_0, \dot{\theta}_0) \approx q_{\text{opt}}(\theta_0, 0)$. Таким образом, p_{opt} и q_{opt} являются функциями только одного аргумента θ_0 : $p_{\text{opt}} = p_{\text{opt}}(\theta_0)$ и $q_{\text{opt}} = q_{\text{opt}}(\theta_0)$. На практике принятое приближение может привести лишь к тому, что наибольшее абсолютное значение угловой скорости в течение ПП несущественно (в пределах допустимого запаса) превзойдет величину $\dot{\theta}_{\text{lim}}$.

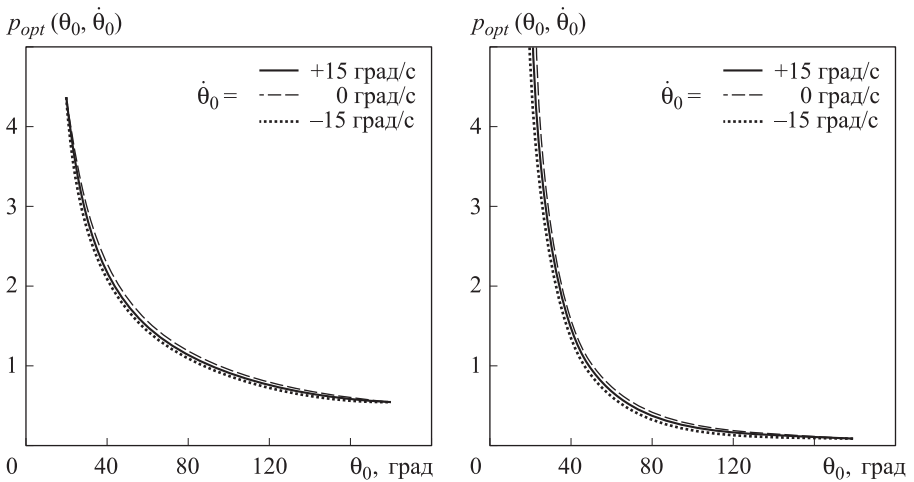


Рис. 5. Оптимальные значения p и q при различных начальных условиях

При малых начальных значениях угла $\theta_0 < 20^\circ$ величины p_{opt} и q_{opt} согласно изложенной методике определить затруднительно, поскольку в этих случаях отсутствует четко выраженный минимум у функции $T_{\text{ПП}}(p, q_{\text{lim}}(p))$, вид которой показан на рис. 4. Но при таких начальных значениях угла время ПП (рис. 6) невелико: $T_{\text{ПП}} < 3$ с. Поэтому важность получения точного минимума по времени ПП значительно снижается.

Далее будем аппроксимировать зависимости $p_{\text{opt}}(\theta_0)$ и $q_{\text{opt}}(\theta_0)$ степенными полиномами по критерию наименьших квадратов. Прове-

денные исследования (рис. 7) показали, что наименьшая степень полинома, который с приемлемой точностью аппроксимирует зависимость $p_{opt}(\theta_0)$, равна шести. При этом зависимость $q_{opt}(\theta_0)$ следует аппроксимировать полиномом более высокой (седьмой) степени, поскольку важно отразить малые изменения параметра q_{opt} при значениях аргумента $\theta_0 > 90^\circ$ (это сильно сказывается на результирующей величине $T_{ПП}$). Полученные полиномы могут экстраполировать соответствующие зависимости на всю область определения $\theta_0 \in (0^\circ; 180^\circ]$.

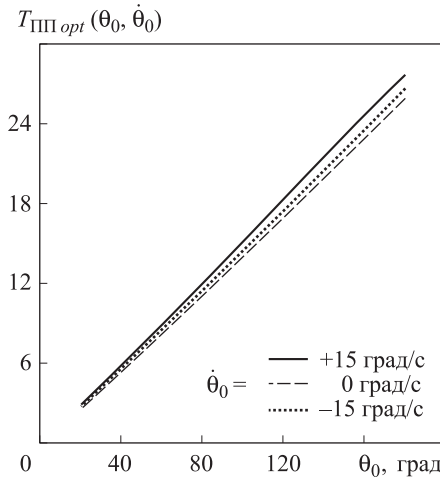


Рис. 6. Оптимальные значения $T_{ПП}$ при различных начальных условиях

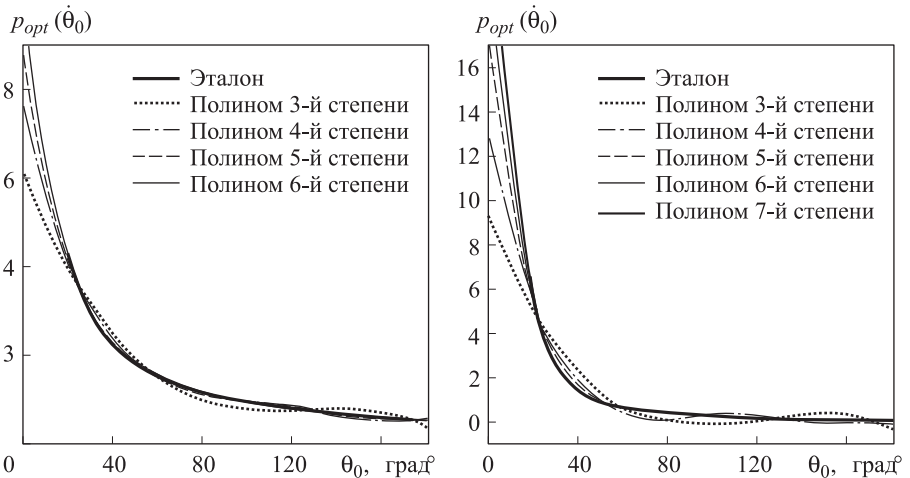


Рис. 7. Аппроксимация зависимостей $p_{opt}(\theta_0)$ и $q_{opt}(\theta_0)$ различными полиномами

Таким образом, степенные функции, по которым оптимальные параметры управления $p = p_{\text{opt}}$ и $q = q_{\text{opt}}$ могут быть рассчитаны на борту, имеют вид

$$p_{\text{opt}}(\theta_0) = \begin{bmatrix} 0,1717 \\ -2,0498 \\ 9,9069 \\ -24,8888 \\ 34,7234 \\ -26,6188 \\ 10,3685 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \theta_0^6 \\ \theta_0^5 \\ \theta_0^4 \\ \theta_0^3 \\ \theta_0^2 \\ \theta_0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad q_{\text{opt}}(\theta_0) = \begin{bmatrix} \theta_0^7 \\ \theta_0^6 \\ \theta_0^5 \\ \theta_0^4 \\ \theta_0^3 \\ \theta_0^2 \\ \theta_0 \\ 1 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} -0,5069 \\ 6,8596 \\ -38,5408 \\ 116,3190 \\ -203,5912 \\ 207,4218 \\ -115,5310 \\ 28,3869 \end{bmatrix}. \quad (5.1)$$

6. Пример численного моделирования. Рассматривается математическая модель ВА, характеризующаяся следующими параметрами: геометрические размеры $L = 2,5$ м и $S = 4$ м², координаты ЦМ в ГСК $r_x = 2$ м, $r_y = -0,25$ м и $r_z = 0$, осевые моменты инерции в ССК $J_x = 1400$ кг·м², $J_y = 1600$ кг·м² и $J_z = 1800$ кг·м². Номинальные аэродинамические характеристики ВА представлены на рис. 8.

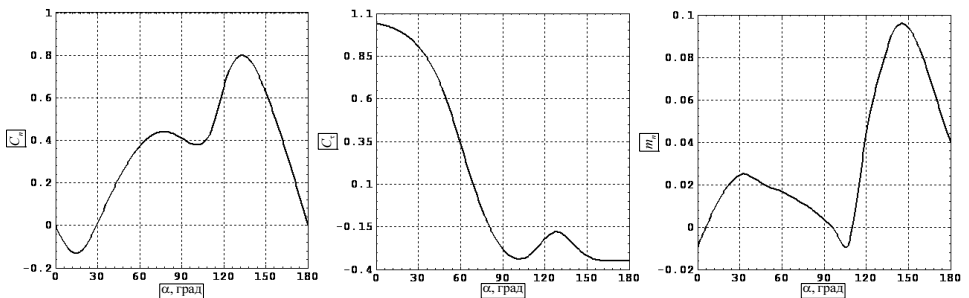


Рис. 8. Номинальные аэродинамические характеристики ВА

В среде Delphi было смоделировано детерминированное угловое движение ВА, описываемое уравнениями (1.1) и (1.2) с использованием матрицы \mathbf{G} вида (1.3). Рассматривался спуск ВА с высоты 2500 м над посадочной площадкой при отсутствии управления движением ЦМ. Вертикальная составляющая скорости (в ИСК) в начальный момент времени была принята равной -100 м/с. Полагалось, что номинальная модель аэродинамики соответствует реальным аэродинамическим воздействиям, а ветром можно пренебречь. Использовался закон управления (4.5) с параметрами (5.1), причем наличие в (4.5) детерминированного возмущения обусловлено особенностями линеаризации и не учитывает других внешних воздей-

ствий. Длительность вычислительного такта, совпадающего с тактом измерений, составляет 0,05 с.

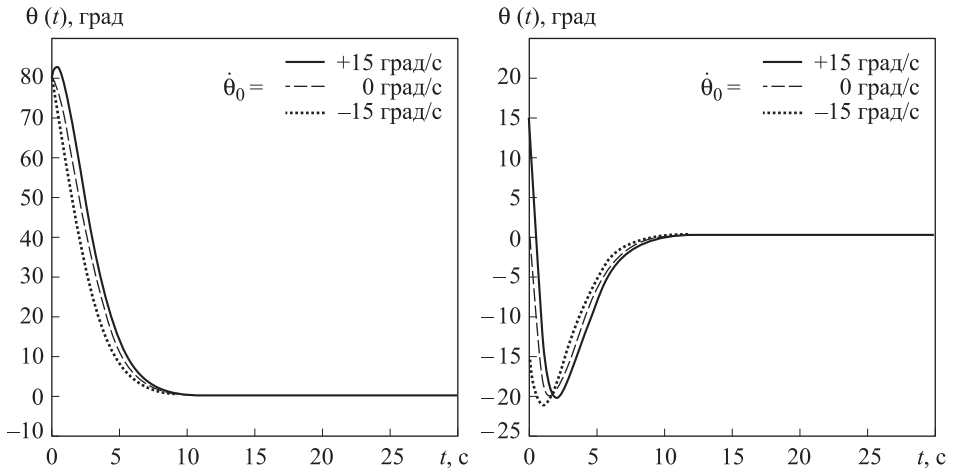


Рис. 9. Переходные процессы при развороте из начального угла $\theta_0 = 80^\circ$

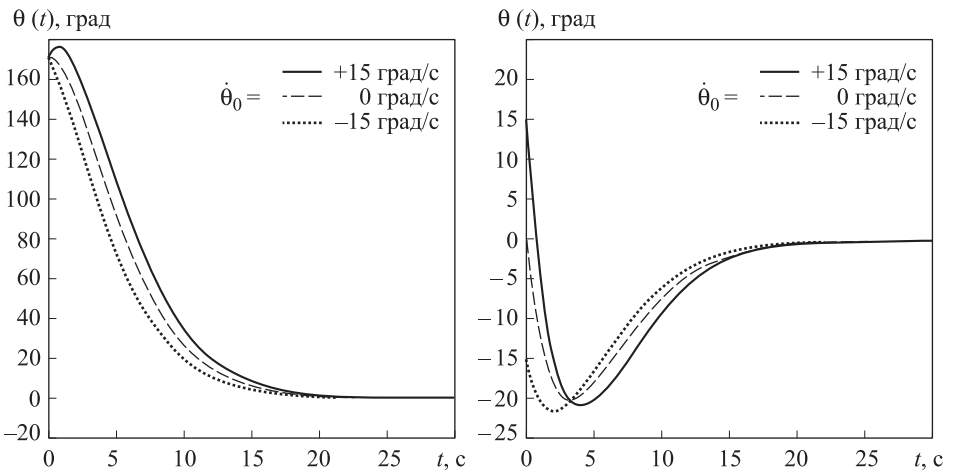


Рис. 10. Переходные процессы при развороте из начального угла $\theta_0 = 170^\circ$

В результате для различных начальных условий, исключая проявление эффекта «складывания рамок» [4], были получены ПП и оценено время приведения ориентации к заданному вертикальному положению (рис. 9, 10). Известно, что среднее время работы ПТДУ должно составлять порядка 25...40 с. Математическое моделирование показало, что максимальная длительность разворота по тангажу (начальный угол близок к 90°) не превышает 11...12 с (рис. 9), а по рысканью и крену (начальный угол близок к 180°) — 23...24 с (рис. 10). В реальных условиях начальные значения углов, как правило, существенно меньше предельно допустимых значений, следова-

тельно, и время ПП окажется меньше полученной максимальной длительности разворотов. Таким образом, синтезированный закон управления (4.5) с параметрами (5.1) позволяет к моменту касания посадочными опорами ВА поверхности Земли обеспечить строго вертикальное угловое положение ВА при любых допустимых начальных значениях углов и угловых скоростей.

Заключение. В работе с применением методов точного размещения полюсов и модального управления при наличии детерминированных внешних возмущений решена задача минимизации времени переходного процесса при управлении угловым движением возвращаемого аппарата с посадочной твердотопливной двигательной установкой на этапе приземления. Предложен способ поиска значений полюсов, обеспечивающих минимальное время переходного процесса при наличии верхнего ограничения на абсолютную величину угловой скорости аппарата. Получены приближенные эмпирические выражения, позволяющие для всех возможных начальных условий по углу и угловой скорости определять необходимые значения корней. В детерминированной постановке рассмотрен пример численного моделирования, который показал, что предлагаемый закон управления при любых начальных значениях угла и угловой скорости из допустимого диапазона позволяет за время работы двигательной установки привести возвращаемый аппарат в вертикальное угловое положение и обеспечить безопасное касание аппаратом поверхности посадочного полигона.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Евдокимов С.Н., Климанов С.И., Комарова Л.И., Микрин Е.А. Управление угловым движением спускаемого аппарата типа «Союз» при возвращении с орбиты спутника Земли. *Изв. РАН. ТуСУ*, 2011, № 5, с. 134–143.
- [2] Зубов Н.Е., Микрин Е.А., Мисриханов М.Ш., Рябченко В.Н. Синтез развязывающих законов стабилизации орбитальной ориентации космического аппарата. *Изв. РАН. ТуСУ*, 2012, № 1, с. 92–108.
- [3] Микрин Е.А., ред. *Теоретические основы проектирования информационно-управляющих систем космических аппаратов*. Москва, Наука, 2006, 579 с.
- [4] Раушенбах Б.В., Токарь Е.Н. *Управление ориентацией космических аппаратов*. Москва, Наука, 1974, 600 с.
- [5] Липницкий Ю.М., Красильников А.В., Покровский А.Н., Шманенков В.Н. *Нестационарная аэродинамика баллистического полета*. Москва, ФИЗМАТЛИТ, 2003, 176 с.
- [6] ГОСТ Р25645.166–2004. *Атмосфера Земли верхняя. Модель плотности для баллистического обеспечения полетов искусственных спутников Земли*. Москва, ИПК Изд-во стандартов, 2004.
- [7] Мартынов Н.Н. *Введение в MATLAB 6*. Москва, Кудиц-образ, 2002.

- [8] Мисриханов М.Ш., Рябченко В.Н. Алгебраические и матричные методы в теории линейных ММО-систем. *Вестник ИГЭУ*, 2005, № 5, с. 196–240.

Статья поступила в редакцию 28.06.2013

Ссылку на эту статью просим оформлять следующим образом:

Зубов Н.Е., Лапин А.В., Микрин Е.А. Об одном методе решения задачи синтеза законов управления угловым движением возвращаемого аппарата. *Инженерный журнал: наука и инновации*, 2013, вып. 10. URL: <http://engjournal.ru/catalog/it/nav/1073.html>

Микрин Евгений Анатольевич — д-р техн. наук, академик РАН, первый заместитель генерального конструктора ОАО «РКК ”Энергия“ имени С.П. Королёва», , заведующий кафедрой «Системы автоматического управления» МГТУ им. Н.Э. Баумана. Автор более 100 работ в области проблем управления космическими аппаратами.

Зубов Николай Евгеньевич — д-р техн. наук, заместитель руководителя по науке научно-технического центра ОАО «РКК ”Энергия“ имени С.П. Королёва», профессор кафедры «Системы автоматического управления» МГТУ им. Н.Э. Баумана. Автор более 70 работ в области проблем управления космическими аппаратами. e-mail: Nikolay.Zubov@rsce.ru

Лапин Алексей Владимирович — аспирант ОАО «РКК ”Энергия“ имени С.П. Королёва». Автор 3 работ в области проблем управления космическими аппаратами.