

Решение стационарных двумерных задач естественной конвекции в замкнутых полостях методом R -функций

© М.А. Басараб

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, 105005, Россия

Впервые рассмотрено применение метода Петрова — Галеркина в комбинации с методом R -функций (PGRM) для численно-аналитического решения системы уравнений в частных производных относительно функций температуры, вихря и тока, описывающих естественную тепловую конвекцию в двумерной полости произвольной формы. Решение модельных задач с помощью PGRM показало удовлетворительное согласование с результатами, полученными путем конечно-разностного и конечно-элементного моделирования. PGRM дает возможность абсолютно точно удовлетворить произвольным граничным условиям, получить приемлемое решение в виде обобщенных рядов Фурье по системе небольшого числа глобальных базисных функций. Подходящий выбор базиса для функции вихря позволяет получить представление для функции тока без необходимости решения соответствующего дифференциального уравнения в частных производных.

Ключевые слова: естественная конвекция, замкнутая полость, R -функции, метод Петрова — Галеркина.

Введение. Задача естественной конвекции в замкнутых объемах вызывает повышенный интерес в различных отраслях промышленности — от атомной энергетики до микроэлектромеханического приборостроения. При решении задач конвекции используется хорошо разработанный аппарат вычислительной гидродинамики (англ. CFD — Computational Fluid Dynamics). При этом наибольшей популярностью пользуются конечно-разностные, или FDM-схемы (англ. Finite-Difference Method) [1-4]. Данный класс методов имеет существенный недостаток, заключающийся в сложности построения сетки при нерегулярной геометрии области либо наличии локальных неоднородностей внутри нее. Поэтому более эффективным является применение конечно-элементных, или FEM-схем (англ. Finite-Element Method) в комбинации с вариационными и проекционными методами решения краевых задач, в частности методами Галеркина и Петрова — Галеркина [5]. Развитие этих подходов позволяет вообще отказаться от введения регулярной либо нерегулярной сетки и воспользоваться так называемыми бессеточными (англ. meshless) методами решения краевых задач, например методом коллокации с функциями радиального базиса RBF (англ. Radial-Basis Functions) [6]. Вместе с тем данный под-

ход по-прежнему характеризуется необходимостью выбора относительно большого числа базисных функций, а также нахождения их параметров (тип RBF, центр и ширина каждой RBF).

Еще одной проблемой всех указанных методов является сложность аппроксимации краевых условий, заданных на границе сложной области. Для вихревой функции краевые условия вообще не заданы в явном виде и приходится использовать специальные подходы (например, условия Тома или Вудса [1]) для их постановки.

Рассматривается альтернативный подход к развитию бессеточных методов, основанный на разработанном В.Л. Рвачевым методе R -функций, или RFM (*англ.* *R-Functions Method*) [7-9]. R -функции представляют собой функции вещественного переменного, обладающие свойствами непрерывных аналогов функций булевой алгебры. С их помощью можно конструировать функции по заданным значениям и значениям их производных на произвольных многообразиях. Более того, такие функции могут обладать требуемыми дифференциальными свойствами и могут встраиваться в структуры решения краевых задач, гарантируя тем самым автоматическое удовлетворение решения заданным граничным условиям. Несмотря на то что ранее RFM использовался при решении задач теплопроводности [7-9], а также ряда задач гидродинамики [10-12], классические задачи естественной конвекции жидкости или газа в замкнутых полостях до сих пор не рассматривались. В данной работе впервые предлагается универсальный подход к решению системы безразмерных уравнений конвекции-диффузии в терминах функций температуры, вихря и тока на основе RFM и метода Петрова — Галеркина (Petrov — Galerkin — Rvachev Method, PGRM). Предложенный подход проиллюстрирован на тестовых примерах конвекции в прямоугольной полости с различными краевыми условиями [13-14], а также на более сложной задаче прямоугольной полости с внутренним источником постоянной температуры [15]. Показано, что с помощью подходящего выбора базисных функций можно не только точно удовлетворить всем краевым условиям задачи для функций температуры, вихря и тока, но и избежать решения уравнения для функции тока, что существенно упрощает схему решения системы уравнений свободной конвекции.

Математическая постановка задачи. Рассмотрим модель естественной конвекции на основе приближения по Буссинеску, согласно которому эффекты вязкого и компрессионного нагрева не учитываются и все газовые постоянные, кроме плотности, считаются не зависящими от температуры. В безразмерном виде двумерная стационарная математическая модель свободной конвекции внутри замкнутой полости Ω имеет вид [4]

$$\begin{aligned}
 U \frac{\partial \theta}{\partial X} + V \frac{\partial \theta}{\partial Y} &= \frac{1}{\text{Pr}} \nabla^2 \theta + S; \\
 U \frac{\partial \zeta}{\partial X} + V \frac{\partial \zeta}{\partial Y} &= \nabla^2 \zeta + \text{Gr} \frac{\partial \theta}{\partial X}; \\
 \nabla^2 \psi &= -\zeta; \quad U = \frac{\partial \psi}{\partial Y}, \quad V = -\frac{\partial \psi}{\partial X}.
 \end{aligned}
 \tag{1}$$

Здесь

$$\nabla^2 \equiv \frac{\partial^2}{\partial X^2} + \frac{\partial^2}{\partial Y^2},$$

а физические и геометрические параметры представлены ниже:

Безразмерные горизонтальная и вертикальная координаты.....	$X = x / L, Y = y / L$
Горизонтальная и вертикальная координаты, м...	x, y
Характерный размер области Ω , м.....	L
Безразмерная температура.....	$\theta = (T - T_C) / (T_H - T_C)$
Температура, К.....	T
Максимальная и минимальная температура, К....	T_H, T_C
Безразмерные компоненты горизонтальной и вертикальной скорости.....	$U = uL / \nu, V = \nu L / \nu$
Горизонтальная и вертикальная составляющие скорости, м/с.....	u, ν
Кинематическая вязкость, м ² /с.....	ν
Число Грасгофа.....	$\text{Gr} = g\beta(T_H - T_C)L^3 / \nu^2$
Вертикальное ускорение (ускорение свободного падения), м/с ²	g
Температурный коэффициент объемного расширения газа, К ⁻¹	β
Безразмерная функция внутреннего источника тепла.....	$S = QL^2 / \nu\rho_0c_p(T_H - T_C)$
Объемная мощность источника тепла, Вт/м ³	Q
Плотность газа, кг/м ³	ρ_0
Теплоемкость газа при постоянном давлении, Дж/(кг·К).....	c_p
Число Прандтля.....	$\text{Pr} = c_p\mu / \lambda$
Динамическая вязкость, Па·с.....	μ
Теплопроводность, В(т/м·К).....	λ
Число Рэлея.....	$\text{Ra} = \text{Gr Pr}$
Безразмерная функция вихря.....	ζ
Безразмерная функция тока.....	ψ

На границе области $\partial\Omega$ заданы краевые условия:

$$\theta|_{\partial\Omega_1} = \varphi_1(X, Y), \quad \left. \frac{\partial\theta}{\partial\mathbf{n}} \right|_{\partial\Omega_2} = \varphi_2(X, Y); \quad \psi = \frac{\partial\psi}{\partial\mathbf{n}} = U = V = 0, \quad (2)$$

где φ_1, φ_2 — известные функции, определенные на участках границы $\partial\Omega_1, \partial\Omega_2$ соответственно ($\partial\Omega_1 \cup \partial\Omega_2 = \partial\Omega$, $\partial\Omega_1 \cap \partial\Omega_2 = \emptyset$); \mathbf{n} — вектор внешней нормали к $\partial\Omega$. Для вихревой функции ζ краевые условия обычно аппроксимируются путем разложения функции тока в ряд Тейлора в окрестности границы $\partial\Omega$ [1,4].

Распространенной методикой решения системы (1) является следующая рекуррентная схема:

1) с использованием текущих значений $\theta^{(k)}, U^{(k)}, V^{(k)}$ (начальные приближения на первом шаге времени $k=0$) решается первое уравнение системы (1) и находится $\theta^{(k+1)}$;

2) с использованием прежних значений $\zeta^{(k)}, U^{(k)}, V^{(k)}$ и обновленных значений $\theta^{(k+1)}$ решается второе уравнение системы (1) с целью нахождения $\zeta^{(k+1)}$;

3) с использованием обновленных значений $\zeta^{(k+1)}$ решается третье уравнение системы (1) относительно $\psi^{(k+1)}$ и обновляются значения $U^{(k+1)}, V^{(k+1)}$; после этого, в зависимости от выполнения условий сходимости итераций, осуществляется переход на поз. 1 либо процесс вычислений прекращается.

Если в качестве начального приближения положить $\zeta^{(0)} = \psi^{(0)} = U^{(0)} = V^{(0)} = 0$, то на первом шаге получим решение задачи стационарного теплопереноса при отсутствии конвекции.

Критерием остановки итераций может, например, являться одновременное выполнение условий

$$\max_{(X,Y) \in \Omega} \frac{|\theta^{(k+1)} - \theta^{(k)}|}{|\theta^{(k)}|} \leq \varepsilon, \quad \max_{(X,Y) \in \Omega} \frac{|\zeta^{(k+1)} - \zeta^{(k)}|}{|\zeta^{(k)}|} \leq \varepsilon,$$

$$\max_{(X,Y) \in \Omega} \frac{|\psi^{(k+1)} - \psi^{(k)}|}{|\psi^{(k)}|} \leq \varepsilon.$$

Метод R-функций и решение краевых задач. Основные понятия теории R-функций. Основная идея метода R-функций иллюстрируется на примере однородных краевых условий 1-го рода (Дирихле). Эти условия могут быть удовлетворены точно, если искомое решение краевой задачи представить в виде произведения двух функций: из-

вестной вещественной функции, обращающейся в нуль на границе области, и неизвестной функции, позволяющей удовлетворить (точно либо приближенно) дифференциальному уравнению [16]. До появления работ В.Л. Рвачева [7] эта идея имела ограниченное применение, поскольку не было универсального подхода к конструированию подобных функций для произвольных областей, а также не было ответа на вопрос, как удовлетворить дифференциальным и смешанным краевым условиям.

Функция $z = f(x, y)$ называется R -функцией, если ее знак вполне определяется знаками (но не абсолютными значениями) ее аргументов. Наиболее популярна следующая система R -функций:

$$x \wedge y \equiv x + y - \sqrt{x^2 + y^2}, \quad x \vee y \equiv x + y + \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \bar{x} \equiv -x. \quad (3)$$

Эти R -функции соответствуют логическим операциям конъюнкции, дизъюнкции и отрицания, что позволяет строить в неявной форме уравнения границ сложных геометрических объектов.

Пусть область $\Omega = F(\Omega_1, \dots, \Omega_n)$ образована путем теоретико-множественной комбинации (объединение и пересечение) простых областей Ω_i , каждая из которых аналитически определяется неравенством $\omega_i(x, y) > 0$. Если f есть R -функция, соответствующая булевой функции F , то функция, в неявной форме описывающая сложную область, получается как $\Omega = (f(\omega_1, \dots, \omega_n) > 0)$. При этом $f(\omega_1, \dots, \omega_n) < 0$ за пределами Ω , а уравнение $f(\omega_1, \dots, \omega_n) = 0$ определяет границу $\partial\Omega$ области Ω .

Краевые задачи и структуры их решения. Найдем решение операторного уравнения

$$Au = f \quad (4)$$

внутри ограниченной области $\Omega \subset R^2$ при заданных краевых условиях

$$Lu|_{\partial\Omega} = \varphi \quad (5)$$

на границе $\partial\Omega$.

Общая структура решения краевой задачи определяется выражением

$$u = B_L(\Phi, \omega, \omega_i) + S_L(\omega, \omega_i, \varphi), \quad (6)$$

точно удовлетворяющим граничным условиям независимо от выбора неопределенной компоненты $\Phi(x, y)$. Здесь B_L, S_L — операторы, за-

висящие от геометрии области Ω и участков ее границы $\partial\Omega_i$. Структура решения осуществляет так называемое продолжение граничных условий внутрь области.

Неопределенная компонента структуры (5) представляется в виде ряда

$$\Phi = \sum_{n=1}^N c_n g_n, \quad (7)$$

где $g_n(x, y)$ — элементы полной системы координатных функций (алгебраические или тригонометрические полиномы, сплайны и др.), а c_n — неопределенные коэффициенты, которые находятся, например, методом Галеркина [5], после подстановки структуры (6) в левую часть (4).

Краевое условие 1-го рода (L — тождественный оператор) (5)

$$u|_{\partial\Omega} = \varphi$$

точно удовлетворяется структурой Дирихле

$$u = \omega\Phi + \varphi.$$

Несколько сложнее обстоит дело с краевыми условиями дифференциального типа и смешанными условиями на разных участках границы. Для начала следует определить понятие нормализованного уравнения. Уравнение области $\omega_n = 0$ называется нормализованным, если

$$\omega_n|_{\partial\Omega} = 0, \quad \left. \frac{\partial\omega_n}{\partial\mathbf{n}} \right|_{\partial\Omega} = -1. \quad (8)$$

Например, в качестве нормализованного уравнения прямой может быть взято ее известное нормальное уравнение

$$x \cos \alpha + y \sin \alpha - p = 0,$$

где p — полярное расстояние; α — полярный угол.

На практике нормализация уравнений для широкого класса областей выполняется с учетом того, что функция $\omega(x, y)$, образованная из нормализованных функций $\omega_i(x, y)$ с помощью R -операций (3), будет также нормализована в регулярных точках границы.

Используя этот факт, нормализованные уравнения границ некоторых простейших геометрических объектов в \mathbf{R}^2 (табл. 1), а также преобразования переноса и поворота координат можно автоматически получать нормализованные в регулярных точках границы уравнения более сложных областей. Так, нормализованное уравнение прямоугольной области с длинами сторон $2a$ и $2b$ имеет вид

$$\left[\frac{1}{2a}(a^2 - x^2) \right] \wedge \left[\frac{1}{2b}(b^2 - y^2) \right] =$$

$$= \frac{1}{2a}(a^2 - x^2) + \frac{1}{2b}(b^2 - y^2) - \sqrt{\left[\frac{1}{2a}(a^2 - x^2) \right]^2 + \left[\frac{1}{2b}(b^2 - y^2) \right]^2} = 0.$$

Большое количество примеров нормализованных областей сложной формы приведено в [8].

Таблица 1

Нормализованные уравнения границ простых геометрических областей

Геометрический объект	Нормализованное уравнение
Прямая $ax + by + c = 0$	$\frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}}(ax + by + c) = 0$
Полоса шириной $2a$, параллельная оси OY	$\frac{1}{2a}(a^2 - x^2) = 0$
Окружность радиусом R с центром в точке $(0, 0)$	$\frac{1}{2R}(R^2 - x^2 - y^2) = 0$

Нормализованное уравнение дает возможность строить пучки функций, нормальная производная которых на границе области принимает заданные значения. Для этого вводится линейный дифференциальный оператор с переменными коэффициентами, зависящими от формы области:

$$D \equiv \frac{\partial \omega}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial \omega}{\partial y} \frac{\partial}{\partial y}. \quad (9)$$

Для произвольной достаточно гладкой функции f на границе области $\partial\Omega$ имеет место равенство

$$Df|_{\partial\Omega} = - \frac{\partial f}{\partial \mathbf{n}} \Big|_{\partial\Omega}.$$

Аналоги оператора D , соответствующие участкам $\partial\Omega_i$ границы $\partial\Omega$, обозначим через

$$D^{(i)} \equiv \frac{\partial \omega_i}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial \omega_i}{\partial y} \frac{\partial}{\partial y}.$$

Интересующие нас в дальнейшем типы краевых условий и структуры решения соответствующих краевых задач приведены в табл. 2 (в структурах решений для краевых условий дифференциального типа функции $\omega(x, y)$, $\omega_1(x, y)$ и $\omega_2(x, y)$ — нормализованные).

Вопросы полноты структур и их аппроксимативные свойства рассматриваются в [7, 8].

Таблица 2

Структуры решения для основных типов краевых условий

Краевое условие	Структура решения
1-го рода (Дирихле) $u _{\partial\Omega} = \varphi$	$u = \omega\Phi + \varphi$ (формула Канторовича)
Смешанное (Дирихле) $u _{\partial\Omega_1} = \varphi_1$; $u _{\partial\Omega_2} = \varphi_2$	$u = \omega\Phi + \frac{\omega_1\varphi_2 + \omega_2\varphi_1}{\omega_1 + \omega_2}$ (обобщенная формула Лагранжа)
2-го рода (Неймана) $\partial u / \partial \mathbf{n} _{\partial\Omega} = \varphi$	$u = (1 - \omega D)\Phi - \omega\varphi$
Смешанное (Дирихле/Неймана) $u _{\partial\Omega_1} = \varphi_1$; $\partial u / \partial \mathbf{n} _{\partial\Omega_2} = \varphi_2$	$u = \left(1 - \frac{\omega_1\omega_2}{\omega_1 + \omega_2} D^{(2)}\right) (\omega_1\Phi + \varphi_1) - \frac{\omega_1\omega_2}{\omega_1 + \omega_2} \varphi_2$
«Жесткого защемления» $u _{\partial\Omega} = \partial u / \partial \mathbf{n} _{\partial\Omega} = 0$	$u = \omega^2\Phi$

Метод Петрова — Галеркина. Заменой

$$u \rightarrow u - S_L(\omega, \omega_i, \varphi)$$

предварительно сведем исходную задачу (4), (5) к задаче с однородными краевыми условиями и измененной правой частью f :

$$f \rightarrow f - A[S_L(\omega, \omega_i, \varphi)].$$

Тогда в результате подстановки неопределенной компоненты (7) в структуру решения (6), учитывая линейность краевых условий, получаем разложение

$$u = \sum_{n=0}^N c_n \chi_n, \tag{10}$$

где χ_n — функции трансформированного компонентой структуры B_L базиса g_n :

$$\chi_n = B_L(g_n, \omega, \omega_i).$$

Рассмотрим вопрос нахождения неопределенных компонент c_n методом Петрова — Галеркина [5]. Подставив (10) в (4), получим невязку

$$\delta(x, y; c_1, \dots, c_N) = \sum_{n=1}^N c_n A \chi_n(x, y) - f(x, y), (x, y) \in \Omega. \quad (11)$$

Необходимо определить набор c_n так, чтобы получить невязку, наименее уклоняющуюся от нуля. Метод Петрова — Галеркина определяется условием ортогональности невязки некоторой другой, полной в $L_2(\Omega)$ системе функций $\{h_n\}_{n=1}^N$:

$$\int_{\Omega} \delta(x, y; c_1, \dots, c_N) h_n(x, y) dx dy = 0, \quad n = \overline{1, N}. \quad (12)$$

Если уравнение $Au = f$ линейное, то (12) является системой линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) относительно неизвестных коэффициентов c_n :

$$A\mathbf{c} = \mathbf{b}. \quad (13)$$

Здесь элементы матрицы A и вектор \mathbf{b} имеют вид

$$a_{m,n} = \sum_{n=1}^N c_n \int_{\Omega} h_m A \chi_n dx dy, \quad b_m = \int_{\Omega} f h_m dx dy, \\ m, n = \overline{0, N}.$$

Решение задачи конвекции-диффузии с помощью PGRM. Перейдем теперь к описанию методики решения проблемы конвекции-диффузии (1) с помощью PGRM — комбинации метода Петрова — Галеркина и аппарата R -функций. Пусть функция безразмерной температуры удовлетворяет однородным краевым условиям

$$\theta|_{\partial\Omega} = 0.$$

Тогда ее можно представить в виде структуры Дирихле по функциям некоторого базиса $\{g_n\}$:

$$\theta = \sum_{n=0}^N c_n(\omega g_n). \quad (14)$$

С учетом условий (2) структуру решения для функции тока запишем по аналогии с задачей о жестко заземленной пластинке через базис $\omega^2 g_n$ [17]:

$$\psi = \sum_{n=0}^N e_n(\omega^2 g_n). \quad (15)$$

По построению структуры (14), (15) строго удовлетворяют однородным условиям (2) при произвольном выборе базиса.

Подставляя (15) в левую часть третьего уравнения системы (1), получаем выражение для вихревой функции следующего вида:

$$\zeta = \sum_{n=0}^N d_n \nabla^2(\omega^2 g_n), \quad (16)$$

позволяющее точно согласовать ее краевые условия с зависимостью от функции тока. Таким образом, получено представление функции вихря по базисным функциям $\nabla^2(\omega^2 g_n)$, которые, несмотря на громоздкий вид, могут быть выражены аналитически.

Наконец, подставляя разложение (15) в правую часть третьего уравнения системы (1) и учитывая (16), имеем

$$e_n = -d_n.$$

Теперь видно, что достаточно рекуррентно решать только первые два уравнения системы (1) и находить коэффициенты c_n, d_n из СЛАУ типа (13). В качестве поверочных выбираются координатные функции структуры Дирихле:

$$h_n = \omega g_n.$$

Вычисления интегралов в выражениях для коэффициентов матрицы \mathbf{A} и вектора правой части \mathbf{b} можно осуществлять с помощью двумерных квадратур, а дифференциальные операторы в получаемых выражениях целесообразно аппроксимировать конечно-разностными аналогами, так как точное вычисление приводит к слишком громоздким формулам.

Общий же вид итерационного процесса следующий:

$$\frac{1}{\text{Pr}} \nabla^2 \theta^{(k+1)} = U^{(k)} \frac{\partial \theta^{(k)}}{\partial X} + V^{(k)} \frac{\partial \theta^{(k)}}{\partial Y} - S;$$

$$\nabla^2 \zeta^{(k+1)} = U^{(k)} \frac{\partial \zeta^{(k)}}{\partial X} + V^{(k)} \frac{\partial \zeta^{(k)}}{\partial Y} - \text{Gr} \frac{\partial \theta^{(k+1)}}{\partial X};$$

$$\nabla^2 \psi^{(k+1)} = -\zeta^{(k+1)}; \quad U^{(k+1)} = \frac{\partial \psi^{(k+1)}}{\partial Y}, \quad V^{(k+1)} = -\frac{\partial \psi^{(k+1)}}{\partial X}.$$

Здесь известные либо уже вычисленные величины записаны в правой части выражений.

Численный эксперимент: естественная конвекция в прямоугольной полости. Конвекция в полости с граничными условиями Дирихле. Рассмотрим следующую задачу двумерной конвекции в полости прямоугольной формы [14] (рис. 1, а). Задача является краевой задачей Дирихле относительно функции температуры и описывается системой (1) с параметрами, приведенными на с. 4. Положим начало координат в центре области Ω . На нижней и верхней гранях заданы условия

$$Y = -\frac{H}{2L}, X \in \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right): \quad \theta = 1, \quad \psi = \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{n}} = U = V = 0;$$

$$Y = \frac{H}{2L}, X \in \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right): \quad \theta = \psi = \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{n}} = U = V = 0.$$

Условия на левой и правой гранях следующие:

$$X = -\frac{1}{2}, Y \in \left(-\frac{H}{2L}, \frac{H}{2L}\right): \quad \theta = 1, \quad \psi = \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{n}} = U = V = 0;$$

$$X = \frac{1}{2}, Y \in \left(-\frac{H}{2L}, \frac{H}{2L}\right): \quad \theta = \psi = \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{n}} = U = V = 0.$$

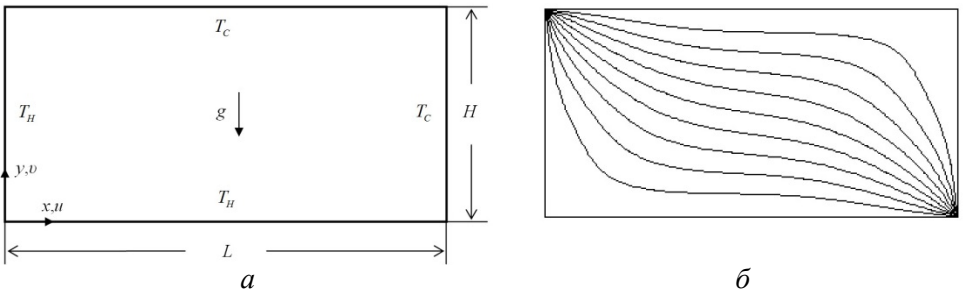


Рис. 1. Прямоугольная полость с граничными условиями Дирихле: а — геометрия задачи; б — изолинии температуры (стационарная теплопроводность)

С помощью обобщенной формулы Лагранжа и замены безразмерной функции температуры θ приведем эту задачу к задаче с однородными краевыми условиями относительно θ :

$$\theta \rightarrow \theta + f,$$

где

$$f = \frac{\omega_C}{\omega_H + \omega_C}.$$

Здесь

$$\omega_H(X, Y) = \left(X + \frac{1}{2}\right) \wedge \left(Y + \frac{H}{2L}\right); \quad \omega_C(X, Y) = \left(\frac{1}{2} - X\right) \wedge \left(\frac{H}{2L} - Y\right).$$

В итоге вместо (1) получим систему

$$\begin{aligned} U \frac{\partial \theta}{\partial X} + V \frac{\partial \theta}{\partial Y} &= \frac{1}{\text{Pr}} \nabla^2 \theta + F; \\ U \frac{\partial \zeta}{\partial X} + V \frac{\partial \zeta}{\partial Y} &= \nabla^2 \zeta + \text{Gr} \left(\frac{\partial \theta}{\partial X} + \frac{\partial f}{\partial X} \right); \\ \nabla^2 \psi &= -\zeta; \quad U = \frac{\partial \psi}{\partial Y}, \quad V = -\frac{\partial \psi}{\partial X}, \end{aligned} \quad (17)$$

где

$$F = \frac{1}{\text{Pr}} \nabla^2 f - U \frac{\partial f}{\partial X} - V \frac{\partial f}{\partial Y},$$

а краевые условия примут однородный вид, пригодный для применения структуры Дирихле (14):

$$\begin{aligned} X = \pm \frac{1}{2}, Y \in \left(-\frac{H}{2L}, \frac{H}{2L}\right): \quad \theta = \psi = \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{n}} = U = V = 0; \\ Y = \pm \frac{H}{2L}, X \in \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right): \quad \theta = \psi = \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{n}} = U = V = 0. \end{aligned}$$

Положим $L = 2H$. В качестве базисных функций выберем алгебраические многочлены $g_n = X^{i(n)} Y^{j(n)}$ степени $i + j \leq 3$, где индексы $i(n), j(n)$ пробегают значения от 0 до 3.

Для расчета квадратур в (13) используем двумерный аналог формулы трапеций на квадратной сетке 64×32 узла.

На рис. 1, б показано поле температуры при отсутствии конвекции ($Ra = 0$), а на рис. 2 приведены изолинии температуры и функции тока в зависимости от различных значений числа Ra , которые хорошо согласуются с данными работы [14].

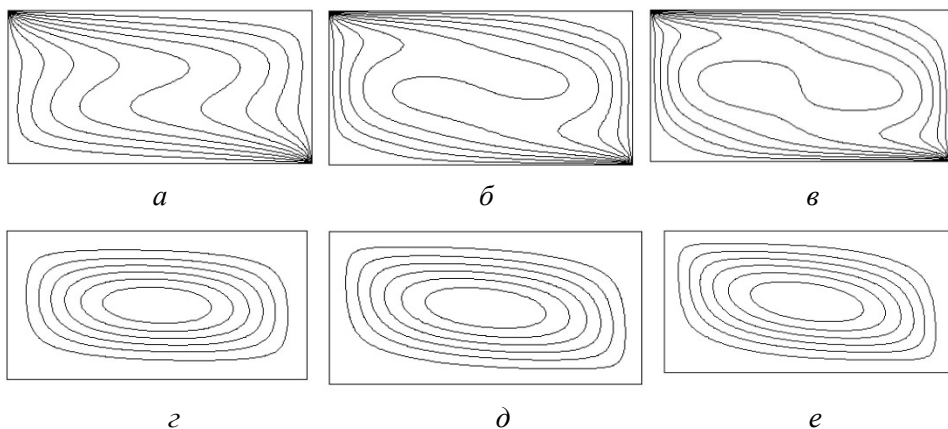


Рис. 2. Изолинии температуры ($a - в$) и функции тока ($г - е$) при $Ra = 10^5(a, г)$; $5 \cdot 10^5(б, д)$; $10^6(в, е)$

Конвекция в полости со смешанными граничными условиями Дирихле и Неймана. Рассмотрим теперь хорошо изученную задачу конвекции в прямоугольной области, приведенную на рис. 3, а [13]. Для нее имеем следующие краевые условия:

$$\begin{aligned}
 X = -\frac{1}{2}, Y \in \left(-\frac{H}{L}, \frac{H}{L}\right): \quad \theta = 1, \quad \psi = \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{n}} = U = V = 0; \\
 X = \frac{1}{2}, Y \in \left(-\frac{H}{2L}, \frac{H}{2L}\right): \quad \theta = \psi = \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{n}} = U = V = 0; \\
 Y = \pm \frac{H}{2L}, X \in \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right): \quad \frac{\partial \theta}{\partial \mathbf{n}} = \psi = \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{n}} = U = V = 0.
 \end{aligned} \tag{18}$$

С помощью обобщенной формулы Лагранжа и замены безразмерной функции температуры θ приведем эту задачу к задаче с однородными краевыми условиями относительно θ :

$$\theta \rightarrow \theta + f = \theta + \left(\frac{1}{2} - X\right),$$

где

$$f = \frac{\omega_C}{\omega_H + \omega_C}; \quad \omega_H = X + \frac{1}{2}; \quad \omega_C = \frac{1}{2} - X.$$

Вместо (1) опять получим систему (17), а краевые условия (18) примут вид

$$\begin{aligned} X = \pm \frac{1}{2}, Y \in \left(-\frac{H}{L}, \frac{H}{L}\right): \quad \theta = \psi = \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{n}} = U = V = 0; \\ Y = \pm \frac{H}{L}, X \in \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right): \quad \frac{\partial \theta}{\partial \mathbf{n}} = \psi = \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{n}} = U = V = 0. \end{aligned} \quad (19)$$

Теперь представим безразмерную температуру в виде следующей структуры решения (см. табл. 2):

$$\theta = \sum_{n=0}^N c_n \chi_n, \quad \chi_n = \omega_1 - \frac{\omega_1 \omega_2}{\omega_1 + \omega_2} \left(\frac{\partial(\omega_1 g_n)}{\partial X} \frac{\partial \omega_2}{\partial X} + \frac{\partial(\omega_1 g_n)}{\partial Y} \frac{\partial \omega_2}{\partial Y} \right). \quad (20)$$

Здесь

$$\omega_1 = \frac{1}{4} - X^2; \quad \omega_2 = \frac{L}{H} \left(\frac{H^2}{L^2} - Y^2 \right).$$

Структуры решения для функции тока и вихря запишем в виде (15), (16) соответственно, с учетом того, что

$$\omega = \omega_1 \wedge \omega_2.$$

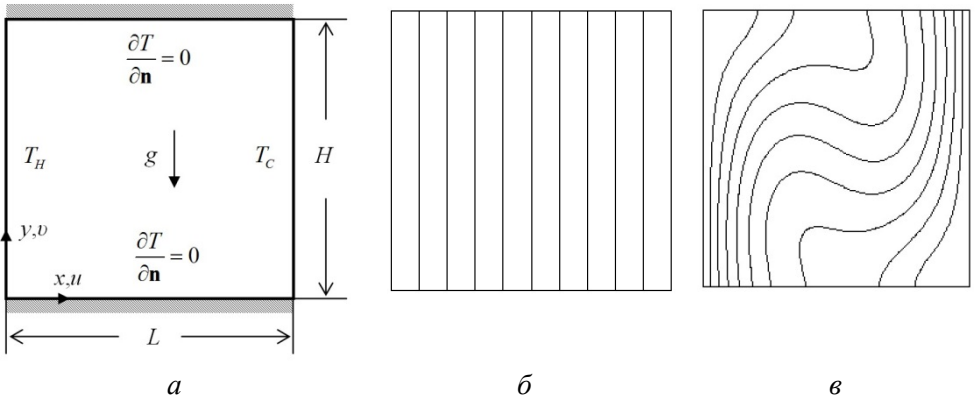


Рис. 3. Задача конвекции с теплоизолированными верхней и нижней границами: *a* — геометрия задачи; *b* — изолинии температуры при стационарной теплопроводности; *в* — изолинии температуры при $Ra = 10^4$

На рис. 3, б и 3, в показаны линии уровня температуры соответственно для случаев стационарного теплопереноса при отсутствии конвекции и при наличии конвекции в квадратной области ($L = H$), хорошо согласующиеся с результатами [13], что также подтверждается сравнением значений числа Нуссельта Nu в различных сечениях. Численное интегрирование проводилось методом трапеций на сетке 64×64 узла.

Конвекция в полости с внутренним нагревом. Более сложный пример, наглядно иллюстрирующий преимущества RFM, заимствован из работы [15]. Геометрия задачи показана на рис. 4, а. В середине прямоугольной области находится внутренний призматический источник тепла квадратного сечения. На рис. 4, б приведены стационарные линии уровня температуры для чистой задачи теплопроводности, а на рис. 4, в — при наличии конвекции. Решение данной задачи осуществлялось аналогично предыдущей за исключением определения функции f :

$$f = \frac{\omega_C}{\omega_H + \omega_C}, \quad \omega_C = \frac{1}{L} \left(\frac{L^2}{4} - X^2 \right),$$

$$\omega_H = - \left(\frac{1}{\Delta} \left[\frac{\Delta^2}{4} - \left(X \frac{\sqrt{2}}{2} + Y \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \right] \wedge \frac{1}{\Delta} \left[\frac{\Delta^2}{4} - \left(X \frac{\sqrt{2}}{2} - Y \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \right] \right),$$

где Δ — длина стороны внутренней квадратной области.

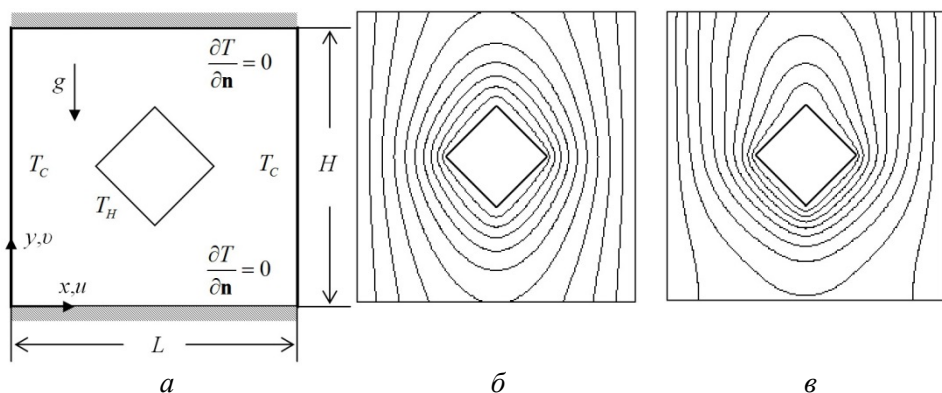


Рис. 4. Конвекция с внутренним нагревом:

a — геометрия задачи; *б* — изолинии температуры при стационарной теплопроводности; *в* — изолинии температуры $Ra = 10^4$

Заключение. Результаты численных экспериментов подтверждают эффективность метода R -функций в комбинации с методом Петрова — Галеркина (PGRM) при решении задач свободной конвекции

в полостях произвольной геометрии с различными краевыми условиями. Применение метода R -функций и полуаналитических структур позволяет получить решение задачи конвекции-диффузии с приемлемой точностью на основе небольшого количества членов обобщенного ряда Фурье, при этом априори точно удовлетворяя граничным условиям. Указанный подход может эффективно реализоваться при оптимизации теплового режима приборов [18], а также при анализе характеристик датчиков, принцип действия которых основан на конвекции жидкости или газа в замкнутых объемах, в частности теплового акселерометра [19].

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Роуч П. *Вычислительная гидродинамика*. Москва, Мир, 1980.
- [2] Патанкар С.В. *Численное решение задач теплопроводности и конвективного теплообмена при течении в каналах*. Москва, Изд-во МЭИ, 2003.
- [3] Самарский А.А., Вабищевич П.Н. *Численные методы решения задач конвекции-диффузии*. Москва, УРСС, 2009.
- [4] Ши Д. *Численные методы в задачах теплообмена*. Москва, Мир, 1988.
- [5] Флетчер К. Численные методы на основе метода Галеркина. Москва, Мир, 1988.
- [6] Kosec G., Šarler B. Numerical Solution of Natural Convection Problems by a Meshless Method. *Convection and Conduction Heat Transfer*. Ahsan A. Rijeka Ed., InTech, 2011.
- [7] Рвачев В.Л. *Теория R-функций и некоторые ее приложения*. Киев, Наукова думка, 1982.
- [8] Кравченко В.Ф., Басараб М.А. *Булева алгебра и методы аппроксимации в краевых задачах электродинамики*. Москва, Физматлит, 2004.
- [9] Matveev V.A., Basarab M.A. Numerical Modeling of Heat Diffusion Processes in the Solid-state Wave Gyro Resonator by the R-function Method. *Vestnik, Journal of the Bauman Moscow State Technical University, Natural Science and Engineering*, 2005, pp. 98—110.
- [10] Рвачев В.Л., Суворова И.Г., Шейко Т.И. Численная реализация задачи о течении вязкой жидкости методом R -функций в системе «Поле-3». *Мат. методи та фіз.-мех. поля*, 1991, вып. 33, с. 95—99.
- [11] Суворова И.Г., Кравченко О.В. Математическое моделирование потока жидкости методом R -функций. *Системні технології*, 2006, вип. 4 (45), с. 57—69.
- [12] Суворова И.Г., Кравченко О.В., Баранов И.А. Математическое и компьютерное моделирование осесимметричных течений вязкой несжимаемой жидкости с использованием метода R -функций. *Мат. методи та фіз.-мех. поля*, 2011, т. 54, № 2, с. 139—149.
- [13] De Vahl Davis G. Natural Convection of Air in a Square Cavity: A Benchmark Numerical Solution. *Int. Journal of Numerical Methods in Fluids*, 1983, vol. 3, pp. 249—264.
- [14] Corcione M. Effects of the Thermal Boundary Conditions at the Sidewalls upon Natural Convection in Rectangular Enclosures Heated from Below and Cooled from Above. *Int. Journal of Thermal Sciences*, 2003, vol. 42, pp. 199—208.
- [15] Kumar De A., Dalal A. A Numerical Study of Natural Convection around a Square, Horizontal, Heated Cylinder Placed in an Enclosure. *Int. Journal of Heat and Mass Transfer*, 2006, vol. 49, pp. 4608—4623.

- [16] Канторович Л.В., Крылов В.И. *Приближенные методы высшего анализа*. Москва, Ленинград, Физматлит, 1962.
- [17] Басараб М.А. *Алгебологические методы и алгоритмы решения двумерных краевых задач теории упругости*. Москва, Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2003.
- [18] Дульнев Г.Н. *Тепло- и массообмен в радиоэлектронной аппаратуре*. – Москва, Высшая школа, 1984.
- [19] Giani A., Combette P., Deblonde A., Garraud A., Matveev V.A., Basarab M.A. A Highly Sensitive Thermal Accelerometer with Improved Bandwidth. *Proc. of the 20th Saint-Petersburg Int. Conf. on Integrated Navigation Systems*, 27—29 May, 2013, Saint-Petersburg, Russia, CSRI Elektropribor, pp. 191—198.

Статья поступила в редакцию 24.06.2013

Ссылку на эту статью просим оформлять следующим образом:

Басараб М.А. Решение стационарных двумерных задач естественной конвекции в замкнутых полостях методом R -функций. *Инженерный журнал: наука и инновации*, 2013, вып. 11. URL: <http://engjournal.ru/catalog/mathmodel/hidden/1071.html>

Басараб Михаил Алексеевич окончил Харьковский авиационный институт им. Н.Е. Жуковского в 1993 г. Д-р физ.-мат. наук, профессор кафедры «Теоретическая информатика и компьютерные технологии» МГТУ им. Н.Э. Баумана. Автор пяти монографий и более 100 научных работ в области прикладной математики, информатики, цифровой обработки сигналов, радиофизики. e-mail: bmic@mail.ru