УДК 681.32-192

Моделирование надежности компьютерной сети

© А.М. Андреев, Г.П. Можаров

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, 105005, Россия

Исследована надежность компьютерных сетей, структура которых хорошо отображается в виде случайного графа сетевого типа. Рассмотрена задача оценки вероятности связности случайного граф, посредством моделирования надежности компьютерных сетей, а также возможности управления надежностью и качеством компьютерных сетей. Изучена вероятность связности двух выбранных узлов сети между собой или одного из узлов сети со всеми остальными. Определены верхние и нижние границы для мер наиболее надежной коммуникационной сети.

Ключевые слова: *компьютерная сеть, моделирование надежности, границы надежности, связность, случайный граф, разделяющее множество.*

Введение. Компьютерная сеть (КС) представляется моделью в виде линейного графа, в котором узлы или вершины соответствуют КС, а ребра — линиям связи между ними. Критерии надежности для такой модели могут определяться различными способами. Простейшим критерием [1, 2] является минимум ребер или узлов, которые должны быть удалены, чтобы нарушить все пути между любой оставшейся парой узлов. Эта мера, известная как связность графа, равняется нижней границе максимального числа узлов, разъединяющих пути между любой парой узлов. Более общим критерием [3–5] является минимальное число ребер, которое должно быть удалено из графа, чтобы изолировать любой подграф из m узлов от остального графа. Эту величину обозначим $\delta(m)$. Аналогично можно сформулировать критерий для случая отказа узлов [6, 7].

Отказы узлов или ребер в сети появляются случайно. Показателем общей надежности сети является верхняя граница вероятности прерывания обслуживания между любой парой действующих узлов, определяемая заданным числом узлов и ребер в любом разделяющем множестве сети и их надежностью. Вычисление этой вероятности основывается также на максимальном числе разделяющих множеств, удаление которых приводит к нарушению связи между любой парой действующих узлов в КС.

Математическая модель надежной компьютерной сети. Вероятностные характеристики надежных компьютерных сетей могут быть определены для случая статистически независимых контактов. Любая двухполюсная сеть из m контактов будет связана с вероятностью $g(p)$ и замкнута с вероятностью $h(p)$:

$$g(p)=\sum_{i=0}^{m} B_i p^i (1-p)^{m-i},$$
$$h(p)=\sum_{i=0}^{m} A_i p^i (1-p)^{m-i}, \qquad (1)$$

где p — вероятность того, что контакт разомкнут; B_i (аналогично A_i) — число комбинаций из i контактов, таких, что сеть размыкается (замыкается), если эти i контактов размыкаются (замыкаются), а остальные $m-i$ контактов замыкаются (размыкаются) [8, 9].

Предположим, что в КС имеют место статистически независимые отказы с вероятностью p для каждого ребра и с вероятностью q для каждого узла вычислительной сети. Тогда для сети из n узлов и b ребер при $p \gg q$ из (1) следует [4, 8], что вероятность $P_c[v, u]$ успешной связи между любой парой действующих центров (вычислительных узлов) v и u определяется приближенным значением

$$\overline{P_c}[v, u]=\sum_{i=0}^{b} A^e_{v,u}(i)(1-p)^i p^{b-i},$$

где $A^e_{v,u}(i)$ — число комбинаций из i ребер, таких, что имеется по крайней мере одно ребро между узлами, если i ребер работоспособны, а остальные $b-i$ отказали.

При $q \gg p$ из (1) следует, что $P_c[v, u]$ можно определить (приближенно) так:

$$\overline{P_c}[v,\ u]=\sum_{i=0}^{n-2} A^n_{v,u}(i)(1-q)^i q^{n-2-i},$$

где $A^n_{v,u}(i)$ и $A^e_{v,u}(i)$ — комбинаторные коэффициенты для узлов и ребер соответственно.

Приближенные значения для вероятности $P_f[v,\ u]$ отказа ребер между любой парой действующих узлов v и u определяются следующим образом:

при $p \gg q$

$$\overline{P_f}[v,\ u]=\sum_{i=0}^{b} C^e_{a,b}(i) p^i (1-p)^{b-i},$$

при $q \gg p$

$$\overline{P_f}[v,\ u]=\sum_{i=0}^{n-2} C^n_{a,b}(i) q^i (1-q)^{n-2-i},$$

где $C^{e}_{v,u}(i)$ и $C^{n}_{v,u}(i)$ — число комбинаций из i ребер (узлов), таких, что удаление только этих ребер (узлов) из графа нарушает все пути между узлами v и u.

Структура надежной компьютерной сети. Рассмотрим структуру графов, на которых коэффициенты $C^{e}_{v,u}(i)$ и $C^{n}_{v,u}(i)$ минимизируются для всех i и всех пар узлов.

Определим главное разделяющее множество узлов (ребер) $\delta(m)$ относительно заданной пары узлов. В связном графе есть множество таких узлов (ребер), что их удаление нарушает все пути между парой узлов и нет соответствующего подмножества, которое имеет то же свойство.

Заметим, что для графа связности d имеется по крайней мере d узлов или ребер в любом главном разделяющем множестве узлов или ребер графа [10, 11].

Отсюда $C^{n}_{v,u}(i) = C^{e}_{v,u}(i) = 0$ при $i < d$, $C^{n}_{v,u}(d)$ и $C^{e}_{v,u}(d)$ равняются числу главных разделяющих множеств узлов и ребер из d элементов относительно любой пары узлов v и u.

Кроме того, при $m > d$ коэффициент $C^{n}_{v,u}(m)$ равняется общему числу разделяющих множеств узлов размера m относительно узлов v и u. Каждое из этих разделяющих множеств состоит из главного разделяющего множества размера $m-i$ относительно узлов v и u плюс дополнительные i узлов, выбранные случайно, где $0 \le i \le m-d$.

Аналогично вычисляется коэффициент $C^{e}_{v,u}(m)$. Если обозначить $X^{n}(m)$ число главных разделяющих множеств узлов размера $m \ge d$ и $X^{e}(m)$ — число главных разделяющих множеств ребер размера m относительно пары узлов v и u, то

$$C^{n}_{v,u}(m) = X^{n}_{v,u}(m) = \sum_{i=1}^{m-d} k^{n}_{v,u}(i)\, X^{n}_{v,u}(m-i);$$

$$C^{e}_{v,u}(m) = X^{e}_{v,u}(m) = \sum_{i=1}^{m-d} k^{e}_{v,u}(i)\, X^{e}_{v,u}(m-i),$$

где произведения под знаками суммы являются числами различных разделяющих множеств узлов (ребер) размера m, каждое из которых образуется присоединением дополнительных i узлов к главному разделяющему множеству узлов (ребер) размера $m-i$ относительно узлов v и u.

Отметим, что

$$k^{n}_{v,u}(i) \le \binom{n-2-m+1}{i}$$

и

$$k_{v,u}^{e}(i) \le \binom{b-m+1}{i},$$

где равенство будет только при n, меньшем, чем минимальное число узлов и ребер, содержащихся в одном из главных разделяющих множеств размера $m-i$.

Следовательно, для всех m коэффициенты $C_{v,u}^{n}(m)$ и $C_{v,u}^{e}(m)$ минимизируются на графах, имеющих минимальное число максимально перекрывающихся главных разделяющих множеств размера m относительно любой пары узлов v и u.

Поэтому в качестве мер надежности заданной топологии КС предлагается использовать следующие выражения:

$$X^{n}(m) = \max_{v,u} X_{v,u}^{n}(m),$$
$$X^{e}(m) = \max_{v,u} X_{v,u}^{e}(m).$$

Максимально надежной сетью является та, для которой $X^{n}(m)$ и $X^{e}(m)$ малы, насколько возможно для всех значений m. Эти меры не являются достаточно совершенными, поскольку не отражают степень перекрытия среди главных разделяющих множеств одинакового размера, но тем не менее очевидно, они лучше тех, что применяются в данное время.

Для $X^{n}(m)$, $X^{e}(m)$ и $\max P_f[v,\ u]$ получены верхние и нижние границы, основанные на топологических свойствах сети [10, 12]. Для любого графа связностью d и диаметром k, если каждый d разделяющих путей между любой парой узлов имеет максимальную длину $l \ge k$, наиболее ненадежной является КС со следующими характеристиками:

$$X^{e}(m) = \begin{cases} kl^{d-1} & \text{при } m = d, \\ 0 & \text{при } m \ne d, \end{cases} \tag{2}$$

$$X^{n}(m) = \begin{cases} (k-1)(l-1)^{d-1} & \text{при } m = d, \\ 0 & \text{при } m \ne d. \end{cases} \tag{3}$$

Верхние границы для мер $X^{n}(m)$ и $X^{e}(m)$ (формулы (2) и (3)) следуют из того, что в худшем случае можно изолировать узлы v и u

удалением любого ребра или узла каждого из d разделяющих путей между узлами. Выражения (2) и (3) фактически определяют верхнюю границу на $\max\limits_{v,u} P_f\left[v,\ u\right]$. Нижние границы мер при малых m получить не так просто, поэтому рассмотрим максимально связные однородные сети (т. е. сети связностью d, у которых все узлы имеют степень d). В этом случае нижние границы определяются так, что среди всех максимально связных однородных сетей связностью d и размером t (минимальное число ребер в любой цепи равно t) наиболее надежной является сеть со следующими топологическими параметрами:

$$X^n\left(m\right)=\begin{cases}2\begin{pmatrix}d-1\\ i\end{pmatrix} & \text{при } t=3,\ m=d+i\left(d-2\right),\ 0\le i\le d-1,\\ 2\begin{pmatrix}d\\ i\end{pmatrix} & \text{при } t>3,\ m=d+i\left(d-2\right),\ 0\le i\le d,\\ 0 & \text{в остальных случаях,}\end{cases} \tag{4}$$

$$X^n\left(m\right)=\begin{cases}1 & \text{при } t=3 \text{ или } 4 \text{ и } m=d,\\ 2\begin{pmatrix}d-1\\ i\end{pmatrix} & \text{при } t=5,\ m=d+i\left(d-2\right),\ 0\le i\le d-1,\\ 2\begin{pmatrix}d\\ i\end{pmatrix} & \text{при } t>5,\ m=d+i\left(d-2\right),\ 0\le i\le d,\\ 0 & \text{в остальных случаях.}\end{cases} \tag{5}$$

Заключение. Проведенные теоретические расчеты позволяют определить новые верхние и нижние границы надежности КС, основанные на топологических свойствах сети. Полученные результаты, на наш взгляд, будут полезны на начальных этапах проектирования КС. Однако условия максимальной связности, максимального размера, минимального диаметра, к сожалению, не являются достаточными, чтобы удовлетворялись нижние границы. Заметим, что предварительные исследования показывают, что построенные графы заданного размера с минимальным количеством узлов имеют очень малые значения $X^n\left(m\right)$ и $X^e\left(m\right)$ для малых m.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Алон Н., Спенсер Дж. *Вероятностный метод*. Москва, Бином. Лаборатория знаний, 2007, 320 с.

[2] Андреев А.М., Можаров Г.П., Сюзев В.В. *Многопроцессорные вычислительные системы: теоретический анализ, математические модели и применение*. Москва, Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2011, 334 с.

[3] Берж К. *Теория графов и ее применения*. Москва, Изд-во иностр. лит, 1962, 320 с.

[4] Мадер В. Минимальные n -связные графы с максимальным числом ребер. *Теория графов. Покрытия, укладки, турниры*. В.Б. Алексеев, Г.П. Гаврилов, А.А. Сапоженко, ред. Москва, Мир, 1974, 224 с.

[5] Уилсон Р. *Введение в теорию графов*. Москва, Мир, 1977, 208 с.

[6] Колчин В.Ф. *Случайные графы*. 2-е изд. Москва, ФИЗМАТЛИТ, 2004, 256 с.

[7] Райгородский А.М. *Модели случайных графов*. Москва, МЦНМО, 2011, 136 с.

[8] Андреев А.М., Можаров Г.П. Анализ основных параметров компьютерных систем методом спектральной теории графов. *Наука и образование*, 2011, № 10. URL: http://technomag.edu.ru/doc/ 232774.html (77-30569/232774).

[9] Андреев А.М., Березкин Д.В., Можаров Г.П., Свирин Ил.С. Математическое моделирование надежности компьютерных систем и сетей. *Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Приборостроение*, 2012, Спец. выпуск «Моделирование и идентификация компьютерных систем и сетей», с. 3–46.

[10] Райншке К., Ушаков И.А. *Оценка надежности систем с использованием графов*. Москва, Радио и связь, 1988, 208 с.

[11] Харари Ф. *Теория графов*. Москва, КомКнига, 2006, 296 с.

[12] Shier D.R. *Network Reliabilty and Algebraic Structures*. Oxford, Claredon Press, 1991.

Статья поступила в редакцию 24.06.2013

Ссылку на эту статью просим оформлять следующим образом:

Андреев А.М., Можаров Г.П. Моделирование надежности компьютерной сети. *Инженерный журнал: наука и инновации*, 2013, вып. 11. URL: http:// engjournal.ru/catalog/it/network/1070.html

Андреев Арк Михайлович родился в 1943 г., окончил МВТУ им. Н.Э. Баумана в 1967 г. Канд. техн. наук, доцент кафедры «Компьютерные системы и сети» МГТУ им. Н.Э. Баумана. Автор более 100 научных работ в области вычислительных средств, систем управления и обработки сигналов. e-mail: arkandreev@gmail.com

Можаров Геннадий Петрович родился в 1945 г., окончил МВТУ им. Н.Э. Баумана в 1970 г. Канд. техн. наук, доцент кафедры «Компьютерные системы и сети» МГТУ им. Н.Э. Баумана. Автор более 60 научных работ в области вычислительных средств, систем управления и обработки сигналов. e-mail: gmojarov@gmail.com