УДК 519.216

Операторы взаимосвязи спектров в базисах комплексных экспоненциальных функций и функций Виленкина – Крестенсона

© В.В. Сюзев

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, 105005, Россия

В работе ставится и решается научно-прикладная задача взаимопреобразования спектров для наиболее известных и широко применяемых в цифровой обработке базисов дискретных комплексных экспоненциальных функций Фурье и функций Виленкина – Крестенсона. С этой целью рассмотрены теоретические основы обобщенного анализа спектра в данных базисах с использованием скалярной и матричной форм представления дискретных преобразований Фурье. Для конкретных значений размерности обрабатываемых сигналов и наиболее используемых на практике обработки способов Адамара и Пэли упорядочения базисных функций в системах Виленкина – Крестенсона приведены структуры и сформулированы основные свойства матричных операторов взаимосвязи спектров, на основе которых записываются оригинальные правила объединения спектров данных базисов в независимые группы. С их помощью операция обобщенного анализа спектра представлена в виде системы более простых для практической реализации уравнений связи спектров и предложена новая аналитическая трактовка энергетического равенства Парсеваля в спектральной области указанных базисов. Дана наглядная и полезная геометрическая интерпретация выявленным особенностям операторов взаимосвязи спектров в базисах Фурье и Виленкина – Крестенсона. Полученные частные результаты обобщены на произвольную размерность дискретного сигнала, что позволило разработать оригинальные алгоритмы взаимопреобразования спектров в базисах Фурье и Виленкина – Крестенсона для сигналов различной формы и длительности. Особенно полезными полученные результаты могут оказаться при решении задач обработки сигналов с использованием их спектров и энергетических характеристик.

Ключевые слова: *базисные функции, функции Виленкина – Крестенсона, анализ спектра, ядро Фурье.*

Введение. При решении задач цифровой обработки сигналов в спектральной области для анализа спектра применяются классические методы дискретного преобразования Фурье (ДПФ) в различных базисах [1–8]. Геометрически они представляют собой процедуры проецирования векторов сигнала на выбранные оси декартовых систем координат используемого линейного функционального пространства сигналов. Целый ряд задач обработки (фильтрация, сжатие, идентификация, имитация детерминированных и случайных сигналов [1, 3, 9]) оперирует с различными спектрами одного и того же сигнала. Применение в них классического подхода приводит к необходимости двукратного выполнения ДПФ для взаимопреобразования спектра: обратного ДПФ в одном базисе для восстановления сигнала и прямого ДПФ в другом базисе для получения нового спектра, что вызывает усложнение результирующего алгоритма обработки.

С другой стороны, поскольку при этом сигнал не меняется, то для преобразования его спектров может быть однократно использована процедура обобщенного анализа спектра, геометрически интерпретируемая как вычисление проекций сигнала в одной системе координат по известным его проекциям в другой системе координат [1, 2, 4, 10]. Сложность и целесообразность применения обобщенного анализа спектра в этом случае во многом зависят от свойств операторов взаимосвязи спектров, составляющих его математическую основу, а последние в свою очередь зависят от используемых систем базисных функций. В данной работе приводятся математическое описание и оригинальные свойства операторов взаимосвязи спектров дискретных комплексных экспоненциальных функций (ДЭФ), широко используемых в частотном анализе и синтезе сигналов [1, 3, 9], и функций Виленкина – Крестенсона (ВКФ). ВКФ относятся к классу параметрических базисов, поскольку могут быть сформированы в системах счисления с различными основаниями. Вследствие этого они обладают обобщающими свойствами и находят применение в теоретических и прикладных исследованиях как для обобщения существующих алгоритмов обработки, так и для разработки принципиально новых алгоритмов [4, 7, 9, 11].

Математическое описание процесса взаимопреобразования спектров. Пусть в функциональном пространстве L_N^2 с базисами ДЭФ

$$def\left(m,i\right)=\exp\left(j\frac{2\pi}{N}mi\right), \tag{1}$$

где $j=\sqrt{-1}$, и ВКФ $Wal(k,i)$ дискретный сигнал $x(i)$, определенный в N точках, представляется в виде

$$x(i)=\sum_{m=0}^{N-1}X_{\Phi}(m)def(m,i), \tag{2}$$

$$x(i)=\sum_{k=0}^{N-1}X_{\text{ВК}}(k)Wal(k,i)$$

и имеет следующие спектры Фурье и Виленкина – Крестенсона:

$$X_{\Phi}(m)=\frac{1}{N}\sum_{i=0}^{N-1}x(i)def^{*}(m,i),$$

$$X_{\text{ВК}}(k) = \frac{1}{N}\sum_{i=0}^{N-1} x(i) Wal^*(k,i). \tag{3}$$

В последних выражениях $def^*(m,i)$ и $Wal^*(k,i)$ являются функциями, комплексно-сопряженными с ДЭФ и ВКФ соответственно.

Если спектр Фурье $X_{\Phi}(m)$ сигнала $x(i)$ известен, то спектр Виленкина – Крестенсона $X_{\text{ВК}}(k)$ этого сигнала можно определить путем подстановки выражения (2) в формулу (3). Тогда после преобразований получаем, что

$$X_{\text{ВК}}(k) = \sum_{m=0}^{N-1} X_{\Phi}(m)\Phi(m,k), \tag{4}$$

где функция двух переменных m и k

$$\Phi(m,k) = \frac{1}{N}\sum_{i=0}^{N-1} def(m,i) Wal^*(k,i) \tag{5}$$

является ядром Фурье линейного преобразования (4) спектра базиса ДЭФ в спектр базиса ВКФ для одного и того же сигнала. Обратный переход от спектра $X_{\text{ВК}}(k)$ к спектру $X_{\Phi}(m)$ можно выполнить по формуле

$$X_{\Phi}(m) = \sum_{\text{к}=0}^{N-1} X_{\text{ВК}}(k)\Phi^{-1}(k,m), \tag{6}$$

где

$$\Phi^{-1}(k,m) = \frac{1}{N}\sum_{i=0}^{N-1} Wal(k,i) def^*(m,i) \tag{7}$$

есть ядро Фурье обратного преобразования спектров. Таким образом, спектры Фурье и Виленкина – Крестенсона одного и того же сигнала взаимосвязаны линейными функциональными операторами, которые полностью определяются своими ядрами Фурье, причем свойства ядер Фурье зависят только от свойств базисов ДЭФ и ВКФ.

Выражения (4) и (6) представляют собой наиболее общую форму преобразований Фурье в базисах ДЭФ и ВКФ. Равенство Парсеваля при этом имеет следующий вид:

$$\sum_{m=0}^{N-1} X_{\Phi}(m) X_{\Phi}^*(m) = \sum_{k=0}^{N-1} X_{\text{ВК}}(k) X_{\text{ВК}}^*(k), \tag{8}$$

где знаком «*» обозначены комплексно-сопряженные составляющие спектров Фурье и Виленкина – Крестенсона. Ядра Фурье (5) и (7) имеют простой физический смысл: это спектр одних базисных функций по системе других базисных функций.

Обобщенные преобразования Фурье (4) и (6) целесообразно представлять в удобном для анализа матричном виде:

$$\mathbf{X}_{\text{ВК}} = \mathbf{\Phi}\mathbf{X}_{\Phi};$$
$$\mathbf{X}_{\Phi} = \mathbf{\Phi}^{-1}\mathbf{X}_{\text{ВК}},$$

где $\mathbf{X}_{\text{ВК}}$ и $\mathbf{X}_{\Phi}$ — матрицы-столбцы спектров в базисах $\{Wal(k,i)\}$ и $\{def(m,i)\}$, а $\mathbf{\Phi}$ — матрица значений ядра Фурье, имеющая в общей форме записи следующий вид:

$$\mathbf{\Phi} = \begin{bmatrix} \mathit{\Phi}(0,0) & \ldots & \mathit{\Phi}(0,N-1) \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \mathit{\Phi}(N-1,0) & \ldots & \mathit{\Phi}(N-1,N-1) \end{bmatrix}.$$

Конкретное представление матриц $\mathbf{\Phi}$, а следовательно, и свойства операторов взаимосвязи спектров зависят от аналитической записи ДЭФ и ВКФ. Для ДЭФ она определяется выражением (1), а для ВКФ зависит от способа их упорядочения в системе. Рассмотрим матрицы ядер Фурье для двух наиболее распространенных на практике способов упорядочения ВКФ: Пэли и Адамара.

Свойства операторов взаимосвязи спектров. Начнем с упорядочения Пэли. Для него ВКФ [4, 8, 11]

$$Wal^{*}(k,i) = \exp\left(-j\frac{2\pi}{p}\sum_{\lambda=1}^{n} k_{\lambda} i_{n+1-\lambda}\right),$$

где k_{λ} и i_{λ} есть значения $\lambda - x$ разрядов n-разрядных представлений номера функции k и ее аргумента i в позиционной системе счисления с произвольным основанием p (p — любое целое положительное ненулевое число):

$$k = \sum_{\lambda=1}^{n} k_{\lambda} p^{\lambda-1};$$

$$i = \sum_{\lambda=1}^{n} i_{\lambda} p^{\lambda-1}.$$

Число разрядов n связано с размерностью сигнала N и основанием p соотношением

$$N = p^{n}.$$

В этом случае ядро Фурье для $N = 9 = 3^{2}$ имеет следующий вид:

$$\mathbf{\Phi}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & \Phi(1,1) & 0 & 0 & \Phi(1,4) & 0 & 0 & \Phi(1,7) & 0\\ 0 & 0 & \Phi(2,2) & 0 & 0 & \Phi(2,5) & 0 & 0 & \Phi(2,8)\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & \Phi(4,1) & 0 & 0 & \Phi(4,4) & 0 & 0 & \Phi(4,7) & 0\\ 0 & 0 & \Phi(5,2) & 0 & 0 & \Phi(5,5) & 0 & 0 & \Phi(5,8)\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & \Phi(7,1) & 0 & 0 & \Phi(7,4) & 0 & 0 & \Phi(7,7) & 0\\ 0 & 0 & \Phi(8,2) & 0 & 0 & \Phi(8,5) & 0 & 0 & \Phi(8,8)\end{bmatrix}, \quad (9)$$

где ненулевые элементы

$$\Phi(1,1)=\Phi(4,4)=\Phi(7,7)=0,65+j0,54;$$

$$\Phi(1,4)=\Phi(4,7)=\Phi(7,1)=0,28-j0,10;$$

$$\Phi(1,7)=\Phi(4,1)=\Phi(7,4)=0,08-j0,44;$$

$$\Phi(2,2)=\Phi(5,5)=\Phi(8,8)=0,08+j0,44;$$

$$\Phi(2,5)=\Phi(5,8)=\Phi(8,2)=0,28+j0,10;$$

$$\Phi(2,8)=\Phi(5,2)=\Phi(8,5)=0,65-j0,54.$$

Численные значения мнимых и действительных частей этих элементов приведены здесь с точностью до второго знака после запятой. Матрица (9) содержит нулевые и ненулевые элементы, причем число ненулевых элементов в ней равно 21 и значительно меньше общего числа элементов, равного 81.

Большое количество нулевых и специфическое расположение ненулевых элементов в матрице **Φ** (9), совпадающее с их расположением в матрице **A** связи спектров при сдвиге сигнала [12], позволяет все спектральные коэффициенты Фурье $X_{\Phi}(m)$ и Виленкина – Крестенсона $X_{\text{ВК}}(k)$ разбить на пять одноименных групп с номерами, принадлежащими только одной конкретной группе. При этом в состав 0, 1 и 2-й групп войдут по одному коэффициенту $X_{\Phi}(0)$ и $X_{\text{ВК}}(0)$, $X_{\Phi}(3)$ и $X_{\text{ВК}}(3)$ и $X_{\Phi}(6)$ и $X_{\text{ВК}}(6)$ соответственно, а в состав 3-й и 4-й групп — по три коэффициента $\{X_{\Phi}(1), X_{\Phi}(4), X_{\Phi}(7)\}$ и $\{X_{\text{ВК}}(1), X_{\text{ВК}}(4), X_{\text{ВК}}(7)\}$; $\{X_{\Phi}(2), X_{\Phi}(5), X_{\Phi}(8)\}$ и $\{X_{\text{ВК}}(2), X_{\text{ВК}}(5), X_{\text{ВК}}(8)\}$. Такое свойство дает возможность записать общее уравнение (4) вычисления спектра Виленкина – Крестенсона по спектру Фурье в виде следующих простых линейных уравнений:

$$X_{\text{ВК}}(0) = X_{\Phi}(0);\; X_{\text{ВК}}(3) = X_{\Phi}(3);\; X_{\text{ВК}}(6) = X_{\Phi}(6);$$

$$X_{\text{ВК}}(1) = \varPhi(1,1)X_{\Phi}(1) + \varPhi(1,4)X_{\Phi}(4) + \varPhi(1,7)X_{\Phi}(7);$$

$$X_{\text{ВК}}(4) = \varPhi(4,1)X_{\Phi}(1) + \varPhi(4,4)X_{\Phi}(4) + \varPhi(4,7)X_{\Phi}(7);$$

$$X_{\text{ВК}}(7) = \varPhi(7,1)X_{\Phi}(1) + \varPhi(7,4)X_{\Phi}(4) + \varPhi(7,7)X_{\Phi}(7);$$

$$X_{\text{ВК}}(2) = \varPhi(2,2)X_{\Phi}(2) + \varPhi(2,5)X_{\Phi}(5) + \varPhi(2,8)X_{\Phi}(8);$$

$$X_{\text{ВК}}(5) = \varPhi(5,2)X_{\Phi}(2) + \varPhi(5,5)X_{\Phi}(5) + \varPhi(5,8)X_{\Phi}(8);$$

$$X_{\text{ВК}}(8) = \varPhi(8,2)X_{\Phi}(2) + \varPhi(8,5)X_{\Phi}(5) + \varPhi(8,8)X_{\Phi}(8).$$

Из этой системы уравнений следует, что спектральные коэффициенты $X_{\text{ВК}}(k)$ с номерами, принадлежащими конкретной группе, вычисляются через коэффициенты $X_{\Phi}(k)$ с номерами этой же группы. Можно показать, что суммы произведений одноименных спектральных коэффициентов на свои комплексно-сопряженные величины в пределах одной группы в этом случае равны между собой:

$$X_{\Phi}(0)X_{\Phi}^{*}(0) = X_{\text{ВК}}(0)X_{\text{ВК}}^{*}(0);\; X_{\Phi}(3)X_{\Phi}^{*}(3) = X_{\text{ВК}}(3)X_{\text{ВК}}^{*}(3);$$

$$X_{\Phi}(6)X_{\Phi}^{*}(6) = X_{\text{ВК}}(6)X_{\text{ВК}}^{*}(6);$$

$$X_{\Phi}(1)X_{\Phi}^{*}(1) + X_{\Phi}(4)X_{\Phi}^{*}(4) + X_{\Phi}(7)X_{\Phi}^{*}(7) =$$
$$= X_{\text{ВК}}(1)X_{\text{ВК}}^{*}(1) + X_{\text{ВК}}(4)X_{\text{ВК}}^{*}(4) + X_{\text{ВК}}(7)X_{\text{ВК}}^{*}(7);$$

$$X_{\Phi}(2)X_{\Phi}^{*}(2) + X_{\Phi}(5)X_{\Phi}^{*}(5) + X_{\Phi}(8)X_{\Phi}^{*}(8) =$$
$$= X_{\text{ВК}}(2)X_{\text{ВК}}^{*}(2) + X_{\text{ВК}}(5)X_{\text{ВК}}^{*}(5) + X_{\text{ВК}}(8)X_{\text{ВК}}^{*}(8).$$

Это обстоятельство может быть учтено при записи обобщенного равенства Парсеваля (8).

Выявленные особенности матрицы **Ф** в базисах ДЭФ и ВКФ – Пэли являются общими и справедливы и для других значений параметров p и n. Поэтому в общем случае эта матрица содержит $\left(p^{2n} + p\right)\big/\left(p+1\right)$ ненулевых элементов, из которых p принимают единичные значения, а остальные являются комплексными и образуют комплексно-сопряженные пары. Данные элементы разбиваются на $n(p-1)+1$ независимых групп. На такое же число групп разбиваются и спектральные коэффициенты $X_{\Phi}(k)$ и $X_{\text{ВК}}(k)$, причем правило образования этих групп идентично соответствующему правилу образования независимых групп спектральных коэффициентов в базисе ВКФ – Пэли при сдвиге сигнала и поясняется в работе [12].

Это правило позволяет общее уравнение преобразования спектров (4) для этого случая представить в виде следующей системы уравнений:

$$X_{\text{ВК}}\left(kp^{n-1}\right)=X_{\Phi}\left(kp^{n-1}\right),\ k=0,1,\dots,p-1;$$

$$\begin{gathered}X_{\text{ВК}}\left[p^{n-\lambda-1}(m+jp)\right]=\sum_{i=0}^{p^{\lambda}-1}\mathit{\Phi}\left[p^{n-\lambda-1}(m+jp),p^{n-\lambda-1}(m+ip)\right]\times\\ \times X_{\Phi}\left[p^{n-\lambda-1}(m+ip)\right],\end{gathered}\tag{10}$$

$$m=1,2,\dots p-1;\lambda=1,2,\dots,n-1;\ j=0,1,\dots,p^{\lambda}-1.$$

Данные уравнения носят общий характер по отношению к параметрам p и n. Из них могут быть получены частные результаты. Так при значениях $p=N$ и $n=1$, когда ВКФ – Пэли переходят в ДЭФ, выполняется только первая система уравнений из (10), которая переходит в систему тривиальных тождеств

$$X_{\Phi}(k)=X_{\Phi}(k),\ k=0,1,\dots,N-1.$$

Матрица **Ф** в этом случае совпадает с единичной матрицей. При значении $p=2$, когда ВКФ – Пэли становятся функциями Уолша – Пэли, уравнения (10) приобретают следующий вид:

$$X_{\text{У}}(0)=X_{\Phi}(0);\ X_{\text{У}}(N/2)=X_{\Phi}(N/2);$$

$$X_{\text{У}}\left[2^{n-\lambda-1}(1+2j)\right]=$$

$$=\sum_{i=0}^{2^{\lambda}-1}\mathit{\Phi}\left[2^{n-\lambda-1}(1+2j),2^{n-\lambda-1}(1+2i)\right]X_{\Phi}\left[2^{n-\lambda-1}(1+2i)\right],$$

$$\lambda=1,2,\dots,n-1;\ j=0,1,\dots,2^{\lambda}-1.$$

Величины $X_{\text{У}}(k)$ здесь являются спектром Уолша – Пэли.

Правило образования одноименных групп спектральных коэффициентов позволяет и равенство Парсеваля для этого случая записать в нетрадиционной форме:

$$\sum_{k=0}^{p-1}X_{\text{ВК}}\left(kp^{n-1}\right)X^{*}_{\text{ВК}}\left(kp^{n-1}\right)+$$

$$+\sum_{m=1}^{p-1}\sum_{\lambda=1}^{n-1}\sum_{i=0}^{p^{\lambda}-1}X_{\text{ВК}}\left[p^{n-\lambda-1}(m+ip)\right]X^{*}_{\text{ВК}}\left[p^{n-\lambda-1}(m+ip)\right]=$$

$$=\sum_{k=0}^{p-1}X_{\Phi}\left(kp^{n-1}\right)X^{*}_{\Phi}\left(kp^{n-1}\right)+$$

$$+\sum_{m=1}^{p-1}\sum_{\lambda=1}^{n-1}\sum_{i=0}^{p^{\lambda}-1} X_{\Phi}\left[p^{n-\lambda-1}(m+ip)\right]X_{\Phi}^{*}\left[p^{n-\lambda-1}(m+ip)\right].$$

При выводе этого выражения учтено, что суммы пар произведений комплексно-сопряженных коэффициентов $X_{\Phi}(k)X_{\Phi}^{*}(k)$ и $X_{\text{ВК}}(k)X_{\text{ВК}}^{*}(k)$ с номерами k, принадлежащими каждой группе, равны между собой.

Перейдем теперь к системе ВКФ – Адамара. В этом случае $Wal^{*}(k,i)=\exp\left(-j\dfrac{2\pi}{p}\sum_{m=1}^{n}k_m i_m\right)$ и матрица $\mathbf{\Phi}$ при $N=9$

$$\mathbf{\Phi}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & \Phi(3,1) & 0 & 0 & \Phi(3,4) & 0 & 0 & \Phi(3,7) & 0\\ 0 & \Phi(4,1) & 0 & 0 & \Phi(4,4) & 0 & 0 & \Phi(4,7) & 0\\ 0 & \Phi(5,1) & 0 & 0 & \Phi(5,4) & 0 & 0 & \Phi(5,7) & 0\\ 0 & 0 & \Phi(6,2) & 0 & 0 & \Phi(6,5) & 0 & 0 & \Phi(6,8)\\ 0 & 0 & \Phi(7,2) & 0 & 0 & \Phi(7,5) & 0 & 0 & \Phi(7,8)\\ 0 & 0 & \Phi(8,2) & 0 & 0 & \Phi(8,5) & 0 & 0 & \Phi(8,8) \end{bmatrix}. \quad (11)$$

Как видно из формулы (11), $\mathbf{\Phi}$ и в этом случае имеет нулевые и ненулевые элементы. Ненулевых элементов 21, из них 3 имеют единичные значения, а остальные образуют 3 комплексно-сопряженные пары:

$$\Phi(3,1)=\Phi(4,4)=\Phi(5,7)=0,65+j0,54;$$
$$\Phi(3,4)=\Phi(4,7)=\Phi(5,1)=0,28-j0,10;$$

$$\Phi(3,7)=\Phi(4,1)=\Phi(5,4)=0,08-j0,44;$$
$$\Phi(6,2)=\Phi(7,5)=\Phi(8,8)=0,08+j0,44;$$

$$\Phi(6,5)=\Phi(7,8)=\Phi(8,2)=0,28+j0,10;$$
$$\Phi(6,8)=\Phi(7,2)=\Phi(8,5)=0,65-j0,54.$$

Структура матрицы $\mathbf{\Phi}$ (11) отличается от структуры соответствующей матрицы $\mathbf{\Phi}$ (9). Однако наличие нулевых элементов и их расположение и в этом случае позволяют из спектральных коэффициентов Фурье и Виленкина – Крестенсона образовать 5 независимых групп, причем в группу с нулевым номером войдут коэффициенты $\{X_{\Phi}(0)\text{ и }X_{\text{ВК}}(0)\}$, в группу с номером 1 — $\{X_{\Phi}(3)\text{ и }X_{\text{ВК}}(1)\}$, с номером 2 — $\{X_{\Phi}(6)\text{ и }X_{\text{ВК}}(2)\}$, с номером 3 — $\{X_{\Phi}(1),\ X_{\Phi}(4), X_{\Phi}(7)$

и $X_{\text{ВК}}(3)$, $X_{\text{ВК}}(4)$, $X_{\text{ВК}}(5)\}$, с номером 4 — $\{X_{\Phi}(2)$, $X_{\Phi}(5)$, $X_{\Phi}(8)$ и $X_{\text{ВК}}(6)$, $X_{\text{ВК}}(7)$, $X_{\text{ВК}}(8)\}$. Такое формирование групп спектральных коэффициентов позволяет общее уравнение (4) преобразования спектров привести к более простому виду:

$$X_{\text{ВК}}(0) = X_{\Phi}(0); \;\; X_{\text{ВК}}(1) = X_{\Phi}(3); \;\; X_{\text{ВК}}(2) = X_{\Phi}(6);$$

$$X_{\text{ВК}}(3) = \varPhi(3,1)X_{\Phi}(1) + \varPhi(3,4)X_{\Phi}(4) + \varPhi(3,7)X_{\Phi}(7);$$

$$X_{\text{ВК}}(4) = \varPhi(4,1)X_{\Phi}(1) + \varPhi(4,4)X_{\Phi}(4) + \varPhi(4,7)X_{\Phi}(7);$$

$$X_{\text{ВК}}(5) = \varPhi(5,1)X_{\Phi}(1) + \varPhi(5,4)X_{\Phi}(4) + \varPhi(5,7)X_{\Phi}(7);$$

$$X_{\text{ВК}}(6) = \varPhi(6,2)X_{\Phi}(2) + \varPhi(6,5)X_{\Phi}(5) + \varPhi(6,8)X_{\Phi}(8);$$

$$X_{\text{ВК}}(7) = \varPhi(7,2)X_{\Phi}(2) + \varPhi(7,5)X_{\Phi}(5) + \varPhi(7,8)X_{\Phi}(8);$$

$$X_{\text{ВК}}(8) = \varPhi(8,2)X_{\Phi}(2) + \varPhi(8,5)X_{\Phi}(5) + \varPhi(8,8)X_{\Phi}(8).$$

Суммы произведений комплексно-сопряженных пар спектральных коэффициентов, принадлежащих одной группе, в этом случае также равны между собой:

$$X_{\text{ВК}}(0)X^{*}_{\text{ВК}}(0) = X_{\Phi}(0)X^{*}_{\Phi}(0); \;\; X_{\text{ВК}}(1)X^{*}_{\text{ВК}}(1) = X_{\Phi}(3)X^{*}_{\Phi}(3);$$
$$X_{\text{ВК}}(2)X^{*}_{\text{ВК}}(2) = X_{\Phi}(6)X^{*}_{\Phi}(6);$$

$$X_{\text{ВК}}(3)X^{*}_{\text{ВК}}(3) + X_{\text{ВК}}(4)X^{*}_{\text{ВК}}(4) + X_{\text{ВК}}(5)X^{*}_{\text{ВК}}(5) = X_{\Phi}(1)X^{*}_{\Phi}(1) +$$
$$+ X_{\Phi}(4)X^{*}_{\Phi}(4) + X_{\Phi}(7)X^{*}_{\Phi}(7);$$

$$X_{\text{ВК}}(6)X^{*}_{\text{ВК}}(6) + X_{\text{ВК}}(7)X^{*}_{\text{ВК}}(7) + X_{\text{ВК}}(8)X^{*}_{\text{ВК}}(8) = X_{\Phi}(2)X^{*}_{\Phi}(2) +$$
$$+ X_{\Phi}(5)X^{*}_{\Phi}(5) + X_{\Phi}(8)X^{*}_{\Phi}(8).$$

Обобщая полученные частные результаты, приходим к выводу, что в общем случае для произвольных p и n матрица **Ф** ядра Фурье для систем ВКФ – Адамара имеет такое же количество нулевых и ненулевых элементов, что и аналогичная ей матрица **Ф** для систем ВКФ – Пэли. Структура матрицы **Ф** позволяет из всех спектральных коэффициентов в базисах ДЭФ $\{X_{\Phi}(m)\}$ и ВКФ – Адамара $\{X_{\text{ВК}}(k)\}$ образовать $n(p-1)+1$ независимых групп, причем номера коэффициентов Фурье, входящие в каждую группу, определяются так же, как в системах ВКФ – Пэли, а соответствующие им номера спектральных коэффициентов Виленкина – Крестенсона – Адамара определяются по правилу образования независимых групп коэффициентов в базисах ВКФ – Адамара при сдвиге сигнала, которое поясняется в работе [12]. В соответствии с этим общее уравнение преобразования спектров (4) представляется в виде следующей системы уравнений:

$$X_{\text{ВК}}(k) = X_{\Phi}\left(kp^{n-1}\right),\ k = 0,1,\ldots,p-1;$$

$$X_{\text{ВК}}\left(mp^{\lambda}+j\right) = \tag{12}$$

$$= \sum_{i=0}^{p^{\lambda}-1} \Phi\left[\left(mp^{\lambda}+j\right), p^{n-\lambda-1}(m+ip)\right] X_{\Phi}\left[p^{n-\lambda-1}(m+ip)\right],$$

$$\lambda = 1,2,\ldots,\ n-1; m = 1,2,\ldots,p-1; j = 0,1,\ldots,p^{\lambda}-1.$$

При $p = 2$ ВКФ – Адамара переходят в функции Уолша – Адамара и система уравнений (12) упрощается:

$$X_{\text{У}}(0) = X_{\Phi}(0);\quad X_{\text{У}}(1) = X_{\Phi}(N/2);$$

$$X_{\text{У}}\left(2^{\lambda}+j\right) = \sum_{i=0}^{2^{\lambda}-1} \Phi\left[(2^{\lambda}+j), 2^{n-\lambda-1}(1+2i)\right] X_{\Phi}\left[2^{n-\lambda-1}(1+2i)\right];$$

$$\lambda = 1,\ 2,\ \ldots,\ n-1;\quad j = 0,\ 1,\ \ldots,\ 2^{\lambda}-1.$$

Здесь величины $X_{\text{У}}(k)$ являются спектром Уолша – Адамара.

Наличие независимых групп спектральных коэффициентов приводит к тому, что и в этом случае равенство Парсеваля может быть записано либо по группам

$$X_{\text{ВК}}(k)X^{*}_{\text{ВК}}(k) = X_{\Phi}\left(kp^{n-1}\right)X^{*}_{\Phi}\left(kp^{n-1}\right),\ \ k = 0,\ 1,\ \ldots,\ p-1;$$

$$\sum_{j=0}^{p^{\lambda}-1} X_{\text{ВК}}\left(mp^{\lambda}+j\right)X^{*}_{\text{ВК}}\left(mp^{\lambda}+j\right) =$$

$$= \sum_{i=0}^{p^{\lambda}-1} X_{\Phi}\left[p^{n-\lambda-1}(m+ip)\right]X^{*}_{\Phi}\left[p^{n-\lambda-1}(m+ip)\right],$$

$$\lambda = 1,\ 2,\ \ldots,\ n-1;\ m = 1,\ 2,\ \ldots,\ p-1,$$

либо в объединенном виде

$$\sum_{k=0}^{p-1} X_{\text{ВК}}(k)X^{*}_{\text{ВК}}(k) + \sum_{\lambda=1}^{n-1}\sum_{m=1}^{p-1} X_{\text{ВК}}\left(mp^{\lambda}+j\right)X^{*}_{\text{ВК}}\left(mp^{\lambda}+j\right) =$$

$$= \sum_{k=0}^{p-1} X_{\Phi}\left(kp^{n-1}\right)X^{*}_{\Phi}\left(kp^{n-1}\right) +$$

$$+ \sum_{\lambda=1}^{n-1}\sum_{m=1}^{p-1} X_{\Phi}\left[p^{n-\lambda-1}(m+ip)\right]X^{*}_{\Phi}\left[p^{n-\lambda-1}(m+ip)\right].$$

Равенство Парсеваля по группам означает, что мощность сигнала одинаково распределяется по группам коэффициентов при его представлении в базисах ДЭФ и ВКФ.

Особенности структуры ядра Фурье преобразования спектров базисов ДЭФ и ВКФ можно пояснить, используя геометрические представления базисных функций в виде осей систем координат функционального пространства сигналов [1, 2, 4]. Система координат Виленкина – Крестенсона развернута в пространстве относительно комплексной экспоненциальной системы так, что многие оси координат одной системы становятся ортогональными осям другой системы. Им соответствуют нулевые значения элементов матрицы ядра. Неортогональными оказываются только те оси, номера которых принадлежат к одной из независимых групп. Им соответствуют ненулевые значения элементов матрицы ядра. Кроме того, у этих систем есть p совпадающих осей: им соответствуют единичные значения элементов матрицы ядра Фурье.

Реализация общего уравнения (4) преобразования спектров Фурье и Виленкина – Крестенсона потребует выполнения по $N^2 = p^{2n}$ комплексных сложений и умножений. При использовании полученных уравнений связи спектров (10) и (12) на анализ спектра будет
затрачено только по $\left(p^{2n} - p^2\right)/\left(p+1\right)$ таких же операций. Вычислительная сложность алгоритмов преобразования спектров уменьшается более чем в $p+1$ раз. Дальнейшее повышение их вычислительной эффективности возможно за счет разработки специальных быстрых процедур, подобных тем, что рассмотрены в работе [11].

Заключение. Решена теоретическая задача обобщенного анализа спектра в базисах комплексных экспоненциальных функций и функций Виленкина – Крестенсона для двух наиболее популярных способов их упорядочения. Получены ядра Фурье для данных базисов, составляющие математическую основу операторов взаимопреобразования их спектров. Проведен анализ структуры этих операторов и показана возможность разделения всех спектральных коэффициентов на малое число независимых групп, что позволило представить аналитическое описание процесса анализа спектра в виде усеченной системы простых линейных алгебраических уравнений. Это в свою очередь позволило получить эффективные вычислительные алгоритмы взаимопреобразования спектров Фурье и Виленкина – Крестенсона. Предложенная при этом нетрадиционная запись энергетических равенств Парсеваля по группам спектральных коэффициентов может оказаться полезной при решении задач обработки сигналов с использованием их энергетических характеристик.

Выявленные свойства носят обобщенный характер и справедливы для любых значений основания используемой системы счисления p. При $p = 2$ они приводят к полезным оригинальным результатам в базисах Уолша – Пэли и Уолша – Адамара, которые являются частным случаем базиса ВКФ.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Айфичер Э., Джервис Б. *Цифровая обработка сигналов: практический подход*. 2-е изд. Москва, Издательский дом «Вильямс», 2004, 992 с.

[2] Трахтман А.М. *Введение в обобщенную спектральную теорию сигналов.* Москва, Сов. радио, 1972, 352 с.

[3] Залманзон Л.А. *Преобразования Фурье, Уолша, Хаара и их применение в управлении, связи и других областях*. Москва, Наука, 1989, 496 с.

[4] Трахтман А.М., Трахтман В.А. *Основы теории дискретных сигналов на конечных интервалах*. Москва, Сов. радио, 1972, 208 с.

[5] Сюзев В.В. Спектральный анализ в базисах функций Хаара. *Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Приборостроение,* 2011, № 2, с. 48–67.

[6] Сюзев В.В. Теоретические основы спектрального анализа в базисе Хартли. *Наука и образование*, 2011, № 10. URL: http://technomag.edu.ru/doc/230816.html

[7] Сюзев В.В. Имитация псевдослучайных сигналов с энергетическими характеристиками, инвариантными к обобщенному сдвигу в системах счисления с переменным основанием. *Инженерный журнал: наука и инновации,* 2012, вып. 1. URL: http://engjournal.ru/catalog/it/hidden/73.html

[8] Сюзев В.В., Савельев А.Я., Гудзенко Д.Ю. Методы представления и преобразования сигналов в базисе обобщенных функций Крестенсона. *Наука и образование,* 2012, № 3. URL: http://technomag.edu.ru/doc/372760.html

[9] Сюзев В.В. Синтез частотных нерекурсивных цифровых фильтров в спектральной области произвольного ортогонального базиса. *Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Приборостроение,* 2000, № 2, с. 19–33.

[10] Сюзев В.В. Обобщенные преобразования Фурье. *Современные информационные технологии. Сб. тр. каф. «Компьютерные системы и сети» МГТУ им. Н.Э. Баумана*. Москва, Эликс+, 2009, с. 130–138.

[11] Садыхов Р.Х., Чеголин П.М., Шмерко В.П. *Методы и средства обработки сигналов в дискретных базисах*. Минск, Наука и техника, 1987, 296 с.

[12] Сюзев В.В. Энергетические спектры сигналов в базисе Виленкина – Крестенсона, инвариантные к циклическому сдвигу. *Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки*, 2007, № 2, с. 64–77.

Статья поступила в редакцию 28.06.2013

Ссылку на эту статью просим оформлять следующим образом:

Сюзев В.В. Операторы взаимосвязи спектров в базисах комплексных экспоненциальных функций и функций Виленкина – Крестенсона. *Инженерный журнал: наука и инновации,* 2013, вып. 11. URL: http://engjournal.ru/catalog/it/hidden/1051.html

Сюзев Владимир Васильевич — д-р техн. наук, профессор, заведующий кафедрой «Компьютерные системы и сети» МГТУ им. Н.Э. Баумана. Область научных интересов: цифровая обработка сигналов и компьютерные информационно-управляющие системы. e-mail: v.suzev@bmstu.ru