УДК 004.056:519.854

Об исследовании устойчивости задач на матроидах

© Э.Н. Гордеев

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, 105005, Россия

За последние двадцать лет появились десятки статей, посвященных исследованию устойчивости в задачах оптимизации, при этом многие результаты, опубликованные в отечественных научных журналах в 1970–1980-е годы, игнорируются, а более поздние публикации цитируются как базовые и оригинальные. Цель данной статьи — обратить на это внимание на одном примере — исследование устойчивости в задачах на матроидах. Для случая нормы Чебышева в пространстве возмущений параметров задачи проблема устойчивости всесторонне изучена в работах 1980-х годов, на которые авторы публикаций 1990-х и более поздних годов вообще не ссылаются. Для случая метрики l_1 задача является технически более сложной, поэтому нельзя говорить о полной эквивалентности опубликованных ранее результатов и появившихся позднее. Однако эти результаты тесно между собой связаны, что и показано в данной статье. При этом область теории матроидов взята просто в качестве примера. Аналогичные ситуации возникают и для других задач.

Ключевые слова: *оптимизационные задачи на матроидах, радиус устойчивости, алгоритм исследования устойчивости.*

В работах [1–7] рассматривались различные подходы к исследованию устойчивости в задачах дискретной оптимизации. Некоторые из этих работ, в частности [4–6], относятся к периоду 1979–1987 гг. В одностраничных тезисах [8] для задачи о кратчайшем остове приведена постановка проблемы устойчивости решения задачи и сформулирован результат, касающийся простого случая одноэлементных возмущений (без доказательств).

Задачи на матроидах исследованы в работах [1] и [6] для разных классов метрик, типов функционалов и способов возмущения параметров задач. Частичный обзор основных результатов приведен и в [2]. Однако в настоящее время в качестве исходных цитируются работы [8–10], хотя результаты работы [8] являются частными случаями или простым следствием ранее полученных результатов, а постановка задачи в [9] и [10], в общем случае не сводящаяся только к исследованию устойчивости, в частных случаях практически эквивалентна такому исследованию. Об этом уже упоминалось в [1], но, видимо, требуются дополнительные пояснения в виде соотнесения полученных результатов.

В [1–7] используются следующие терминология и обозначения. Пусть $E=\{e_1,\ ...,\ e_m\}$ — некоторое множество, $D_m=\{\tau_1,\ ...,\ \tau_q\}$ $q>1$, — система подмножеств множества E, называемых *траекториями*. Элементам из E приписаны веса $w(e_1)=a_1,\ ...,\ w(e_m)=a_m$. Пусть вектор $\boldsymbol{A}=(a_1,\ ...,\ a_m)$ берется из пространства R^m. На каждой траектории определяется функционал $\tau(\boldsymbol{A})$ — длина траектории при взвешивании $\boldsymbol{A}$, например линейный функционал

$$\tau(\boldsymbol{A})=\sum_{e_j\in\tau}a_j. \tag{1}$$

Под дискретной оптимизационной задачей будем понимать тройку $(E,D_m,\boldsymbol{A})$ с определенным на ней типом функционала. Пара (E,D_m) определяет «комбинаторику» задачи, поэтому, если эта пара и функционал фиксированы, а варьируется лишь вектор $\boldsymbol{A}=(a_1,\ ...,a_m)$ в R^m, то получаемую при этом индивидуальную задачу будем обозначать через $\mathrm{Pr}_{\boldsymbol{A}}$.

Множество оптимальных траекторий задачи при взвешивании $\boldsymbol{A}$ обозначим через $\varphi(\boldsymbol{A})$.

Пусть $R_0=\{\boldsymbol{A}:\boldsymbol{A}\in R^m,\ |\varphi(\boldsymbol{A})|=q\}$ и в пространстве R^m задана норма. Назовем задачу $\mathrm{Pr}_{\boldsymbol{A}}$ ε-*устойчивой*, если для любого вектора $\boldsymbol{B}\in R^m$, $\|\boldsymbol{B}\|<\varepsilon$, выполняется условие $\varphi(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})\subseteq\varphi(\boldsymbol{A})$. Радиус устойчивости задачи $\mathrm{Pr}_{\boldsymbol{A}}$, $\boldsymbol{A}\in R_0$, полагаем по определению равным нулю, в противном случае радиусом устойчивости назовем $\sup\varepsilon$, где supremum берется по всем ε, для которых $\mathrm{Pr}_{\boldsymbol{A}}$ является ε-устойчивой.

Вышеупомянутый вектор $\boldsymbol{B}$ будем называть *возмущающим вектором* или *возмущением*.

Таким образом, радиус устойчивости задает предел возмущений элементов весового вектора задачи $\mathrm{Pr}_{\boldsymbol{A}}$, при которых не расширяется множество оптимальных решений.

В [6] рассматривались задачи на матроидах и пересечении матроидов для случая чебышевской метрики в R^m, в [1] — метрика l_1.

В [9, 10] рассматривается задача максимизации веса оптимального решения в рамках фиксированного бюджета. Эта постановка, по сути, очень близка к анализу устойчивости, разработанному в [1–7], но не эквивалентна ему.

Для случая чебышевской метрики результаты [9, 10] следуют непосредственно из результатов работы [6]. В случае же метрики l_1

все выглядит сложнее. Входными параметрами задачи будем считать матрицу A весов ребер графа $G=(V,E)$ с n вершинами и m ребрами и множество D_S всех остовных деревьев этого графа. Кроме того, заданы число B и вторые веса на ребрах. Для ребра e вес $c(e)$ — плата за увеличение длины ребра на единицу. Ребра могут возмущаться только в сторону увеличения.

Другими словами, в пространстве R^m векторов $\boldsymbol{A}$ задана метрика l_1 и ребра могут возмущаться только в сторону увеличения. (В то время как в [1, 6] рассматриваются произвольные независимые возмущения элементов.) Среди всех возмущенных задач, в которых суммарная плата за увеличение длин ребер не превосходит B, требуется найти такую, длина оптимальной траектории которой максимальна. Это называется *задачей максимизации оптимума с фиксированным бюджетом*. В работе [9] предлагается алгоритм сложности $O\left(n^3m^2\log_2\left(n^2/m\right)\right)$. Алгоритм состоит из $O(nm)$ итераций, на каждой из которых не более m раз используется процедура Cheng — Cunningham [11] для нахождения «прочности» (strenght) графа.

Вышеописанный подход на основе радиуса устойчивости можно непосредственно применить к данной задаче в случае, если все $c(e)=1$. Для этого достаточно уметь вычислять радиус устойчивости.

После нахождения радиуса устойчивости получаем новую матрицу весов $\boldsymbol{A}'$. При этом нам известно, все или не все траектории имеют в ней одинаковую длину. Если длина всех траекторий одинакова, то процесс заканчивается. Из теоремы 1 [1, с. 142, 143] следует, что сложность нахождения радиуса устойчивости в рассматриваемом случае $O\left(n^3m\log_2\left(n^2/m\right)\right)$.

В противном случае сравниваем радиус устойчивости с числом B. Если он меньше B, то берем возмущенную задачу $\mathrm{Pr}_{A'}$ и ищем ее радиус устойчивости. Продолжаем так до тех пор, пока не получим задачу с бесконечным радиусом устойчивости (в ней веса всех ребер одинаковы) либо пока сумма всех этих радиусов не станет равной (или превзойдет) B.

Легко показать, что результат не зависит от выбираемых возмущающих векторов.

Так как всего не более m различных значений весов ребер, то общая трудоемкость алгоритма та же, что и в [9], т. е. $O\left(n^3m^2\log_2\left(n^2/m\right)\right)$.

Если же допустить произвольные возмущения весов ребер, то результаты [9] никак не характеризуют устойчивость задачи, как это следует из теоремы 1 в работе [1, с. 142, 143].

Если рассматриваются только возмущения в сторону увеличения, то для нахождения радиуса устойчивости необходима модификация алгоритма из [10], которая, по сути, сводится к извлечению из него процедуры нахождения минимального протыкающего множества, т. е. процедуры Cheng – Cunningham.

Мы привели здесь только один пример из множества постановок, касающихся исследования устойчивости решений в задачах дискретной оптимизации, в рамках которого многие результаты либо уже получены явно, либо сравнительно легко получаются на основе теории устойчивости, разработанной в [1–7].

ЛИТЕРАТУРА

[1] Гордеев Э.Н. Исследование устойчивости в оптимизационных задачах на матроидах в метрике l_1. *Кибернетика и системный анализ*, 2001, № 2, с. 132–144.

[2] Sotskov Yu.N., Leontev V.K., Gordeev E.N. Some concepts of stability analysis in combinatorial optimization. *Discrete Applied Mathematics*, 1995, no. 58, pp. 169–190.

[3] Гордеев Э.Н., Леонтьев В.К. Общий подход к исследованию устойчивости решений в задачах дискретной оптимизации. *Журнал вычислительной математики и математической физики*, 1996, № 36, с. 66–72.

[4] Леонтьев В.К. Устойчивость в линейных дискретных задачах. Яблонский С.В., ред. *Проблемы кибернетики*. Москва, Наука, 1979, вып. 35, с. 169–185.

[5] Леонтьев В.К., Гордеев Э.Н. Качественное исследование траекторных задач. *Кибернетика.* Киев, 1986, № 5, с. 82–90.

[6] Гордеев Э.Н. Алгоритмы полиномиальной сложности для вычисления радиуса устойчивости в двух классах траекторных задач. *Журнал вычислительной математики и математической физики*, 1987, т. 27, № 7, с. 984–992.

[7] Гордеев Э.Н. Устойчивость решений в задаче о кратчайшем пути на графе. *Дискретная математика*, 1989, т. 1, № 3, с. 39–46.

[8] Tarjan R.E. Sensitivity analysis of minimum spanning trees and shortest paths trees. *Inf. Proc. Letters*, 1982, vol. 14, no. 1, pp. 30, 31.

[9] Fredericson G.N., Solis-Oba R. Increasing the weight of minimum spanning trees. *Proc. 7th Annual ACM-SIAM Symp. on Discrete Algotithms*. Amsterdam, 1996, pp. 539–546.

[10] Fredericson G.N., Solis-Oba R. Efficient Algorithms for Robustness in Matroid Optimization. *Proc. 8th Annual ACM-SIAM Symp. on Discrete Algotithms*. Amsterdam, 1997, pp. 659–668.

[11] Cheng E., Cunningham W.H. A faster algorithm for computing the strength of a network. *Inf. Proc. Letters,* 1994, vol. 49, pp. 209–212.

Статья поступила в редакцию 28.06.2013

Ссылку на эту статью просим оформлять следующим образом:

Гордеев Э.Н. Об исследовании устойчивости задач на матроидах. *Инженерный журнал: наука и инновации,* 2013, вып. 11. URL: http://engjournal.ru/catalog/it/hidden/1002.html

Гордеев Эдуард Николаевич родился в 1954 г., окончил Московский физико-технический институт в 1977 г. Д-р физ.-мат. наук, профессор кафедры «Информационная безопасность» МГТУ им. Н.Э. Баумана. Автор более 70 научных работ в области прикладной математики, информатики. e-mail: tatmigor@gmail.com